МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ЩОДО ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ
З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
"ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА"
ДЛЯ СТУДЕНТІВ ДЕННОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ
ЗІ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ 122 «КОМП’ЮТЕРНІ НАУКИ» ТА
123 «КОМП’ЮТЕРНА ІНЖЕНЕРІЯ»

КРЕМЕНЧУК 2020

Методичні вказівки щодо виконання розрахунково-графічної роботи з навчальної дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика» для студентів денної форми навчання для спеціальностей 122–«Комп'ютерні науки» та 123–«Комп'ютерна інженерія».

Укладач к. т. н., доц. В. М. Сидоренко

Рецензент к. т. н., доц. О. Г. Славко

Кафедра комп'ютерних та інформаційних систем

Затверджено методичною радою КрНУ імені Михайла Остроградського
Протокол № _______від_______________ 2020 р.

Голова методичної ради _____________ проф. В. В. Костін

ЗМІСТ

ВСТУП

Навчальна дисципліна «Теорія ймовірностей та математична статистика» належить до циклу дисциплін математичної підготовки бакалаврської програми.

Мета розрахунково-графічної роботи (РГР) – узагальнити знання та навички, набуті під час опрацювання лекційного матеріалу та виконання лабораторних робіт змістовних модулів 1–2 «Теорія ймовірностей» і «Математична статистика». Методичні вказівки дозволяють студентам виконати роботу, яка поєднує необхідність застосування знань як з теорії ймовірностей, так і з математичної статистики у межах однієї задачі, що може бути в інженерній чи науковій практиці майбутнього фахівця.

Мета і завдання навчальної дисципліни: надати студентам знання і прищепити практичні навички застосування методів теорії ймовірностей та математичної статистики під час розв'язання задач у сфері інформаційних технологій із застосуванням спеціалізованого програмного забезпечення.

Місце навчальної дисципліни у навчальному процесі: Навчальна дисципліна базується на знаннях з початкового курсу вищої математики. Матеріал навчальної дисципліни використовується для вивчення дисциплін: «Теорія інформації та кодування», «Алгоритми та методи обчислень», «Основи інтелектуального аналізу даних», «Надійність, контроль та діагностика комп'ютерних систем», «Захист інформації», «Проектування комп'ютерних систем», «Моделювання», «Організація обчислювальних процесів», «Обробка сигналів та зображень», «Експертні системи та системи штучного інтелекту», «Комп'ютерні системи», «Комп'ютерні мережі».

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен знати:

– визначення ймовірності (статистичне, класичне, геометричне, аксіоматичне);

– теореми додавання, множення ймовірностей, повної ймовірності, формулу Байєса;

– основні закони розподілень: біноміальний, Пуассона, геометричний, гіпергеометричний, рівномірний, нормальний, експоненціальний та їх числові характеристики;

– багатовимірний нормальний закон розподілення та його параметри;

– основи теорії кореляції випадкових величин;

– закон великих чисел, теореми Чебишева, Маркова, Бернуллі, центральну граничну теорему, теорему Муавра-Лапласа;

– точні вибіркові розподілення: «χ-квадрат», Ст'юдента, Фішера;

– основи статистичних методів визначення точкових та інтервальних оцінок параметрів розподілень; метод найменших квадратів; метод найбільшої правдоподібності;

– основи теорії перевірки статистичних гіпотез; методи перевірки статистичних гіпотез щодо закону розподілення; методи перевірки статистичних гіпотез щодо параметрів розподілень;

– основи кореляційного аналізу;

– основи однофакторного дисперсійного аналізу за Фішером; непараметричні аналоги однофакторного дисперсійного аналізу; методи множинних порівнянь;

– поняття найпростішого потоку подій;

– основні моделі випадкових процесів: процес Пуассона, вінеровський процес, марківський процес;

– початкові відомості про ланцюг Маркова.

– елементи систем масового обслуговування.

уміти:

– обчислювати ймовірності випадкових величин на підставі статистичного, класичного, геометричного, аксіоматичного визначення з використанням комбінаторних формул;

– користуватися теоремами додавання та множення ймовірностей, формулами повної ймовірності та Байєса;

– визначати сподівання, дисперсію та середні квадратичні відхилення неперервних та дискретних випадкових величин;

– визначати коваріацію та коефіцієнт кореляції випадкових величин;

– використовувати закон великих чисел, теореми Чебишева, Маркова, Бернуллі для розв'язання практичних задач;

– знаходити числові та функціональні статистичні характеристики вибірки;

– знаходити точкові та інтервальні оцінки характеристик вибірки;

– уміти формулювати та перевіряти гіпотези щодо моделі закону розподілення випадкової величини;

– уміти формулювати та перевіряти гіпотези щодо параметрів розподілення;

– розв'язувати типові задачі кореляційного, регресійного та дисперсійного аналізу;

– розв'язувати типові задачі теорії випадкових процесів, зокрема із застосування теорії систем масового обслуговування (СМО): складати граф станів СМО, систему диференціальних рівнянь, що її описує, розраховувати ймовірності станів та інші характеристики.

1 ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ

I. Дано дві випадкові величини $X \sim F(x, \vec{\theta}^1)$, $Y \sim F(y, \vec{\theta}^2)$. Відповідні вектори параметрів $\vec{\theta}^1 = (\theta_1^1, ..., \theta_s^1)$, $\vec{\theta}^2 = (\theta_1^2, ..., \theta_s^2)$ відомі. Випадкова величина Z є композицією законів розподілу X та Y, тобто, $Z = X + Y$.

II. Випадкова величина $X \sim F(x, \vec{\theta})$. Відповідний вектор параметрів $\vec{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_s)$ відомий. Випадкова величина Z є функцією від X, тобто, $Z = \varphi(X)$.

Необхідно:

1. Установити закон розподілу випадкової величини Z: обчислити $f(z, \vec{\theta}), F(z, \vec{\theta})$ та побудувати їх графіки.
2. Обчислити аналітичні вирази для $m(Z), D(Z), \sigma(Z)$.
3. Перевірити результати п.1, 2 за допомогою імітаційного моделювання.

3.1 За допомогою генератору випадкових чисел згенерувати вибірку випадкової величини Z об'єму $n = 1000$ для довільно заданих параметрів $\vec{\theta}^1 = (\theta_1^1, ..., \theta_s^1)$, $\vec{\theta}^2 = (\theta_1^2, ..., \theta_s^2)$ (для варіанту II – для $\vec{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_s)$).

3.2 Використовуючи MachCAD-проект індивідуального завдання за темою «Перевірка статистичних гіпотез. Установлення виду математичної моделі розподілу випадкової величини», перевірити статистичну гіпотезу щодо встановленого закону розподілу випадкової величини Z.

Обчислити точкові оцінки математичного сподівання, дисперсії, середньо квадратичного відхилення (СКВ) та параметрів розподілу Z і порівняти їх з теоретичними.

4. Скласти електронний звіт у форматі Microsoft Word згідно з вимогами ЄСКД. Структура звіту:

– Титульна сторінка;

– постановка завдання;

– детальна схема виконання розрахункової роботи з необхідними екранними формами і поясненнями згідно з робочим завданням, результатами аналізу;

– висновки.

– перелік посилань.

До звіту додати:

– файл Microsoft Excel (при необхідності) з матрицею згенерованих даних;

– файл у форматі MathCAD, або .rmd, ipynb зі статистичним проектом.

2 КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Теорема. Нехай ξ має функцію розподілу $F_\xi(x)$ і щільність розподілу $f_\xi(x)$, і функція $g: R \to R$ монотонна. Тоді випадкова величина $\eta = g(\xi)$ має щільність розподілу

$$f_\eta(x) = \frac{1}{\left|g'\left(g^{-1}(x)\right)\right|} f_\xi\left(g^{-1}(x)\right).$$

Тут $g^{-1}(x)$ – функція розподілу, зворотна до g, і $\frac{1}{g'\left(g^{-1}(x)\right)} = \left(g^{-1}(x)\right)'$ – похідна функції $g^{-1}(x)$.

Закони розподілу екстремальних значень неперервної випадкової величини. Нехай $x_1, x_2, ..., x_n$ – вибірка неперервної випадкової величини X з функцією розподілу $F(x)$. Необхідно встановити закони розподілу $X_{\max} = \max(x_1, x_2, ..., x_n)$ і $X_{\min} = \min(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Закон розподілу X_{max}. За означенням $F(X_{max}) = p(X_{max} < x)$. Тоді

$$F(X_{max}) = p(X_{max} < x) = p(\max(x_1, x_2, ..., x_n) < x) =$$

$$= p(\max(x_1, x_2, ..., x_n) < x) = p(x_1 < x, x_2 < x, ..., x_n < x) =$$

$$= p(x_1 < x)p(x_2 < x)...p(x_n < x) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i < x) = \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{x} f(x)dx =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{x} f(x)dx \right)^n.$$ Тобто

$$F(X_{max}) = \left(\int_{-\infty}^{x} f(x)dx \right)^n.$$

Тоді

$$f(X_{max}) = F'(X_{max}) = \left[\left(\int_{-\infty}^{x} f(x)dx \right)^n \right]' = n \left(\int_{-\infty}^{x} f(x)dx \right)^{n-1} \left(\int_{-\infty}^{x} f(x)dx \right)' =$$

$$= n \left(\int_{-\infty}^{x} f(x)dx \right)^{n-1} f(x).$$ Тобто

$$f(X_{max}) = n \left(\int_{-\infty}^{x} f(x)dx \right)^{n-1} f(x).$$

Закон розподілу X_{min}. Аналогічно отримуємо

$$F(X_{min}) = p(X_{min} < x) = 1 - p(X_{min} > x) = 1 - p(\min(x_1, x_2, ..., x_n) > x) =$$

$$= 1 - p(x_1 > x, x_2 > x, ..., x_n > x) = 1 - p(x_1 > x)p(x_2 > x)...p(x_n > x) =$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} p(x_i > x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - p(x_i < x)\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \right) =$$

$$= 1 - \left(1 - \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \right)^n.$$ Тобто

$$F(X_{\max}) = 1 - \left(1 - \int_{-\infty}^{x} f(x)dx\right)^n .$$

Тоді $f(X_{\max}) = F'(X_{\max}) = \left[1 - \left(1 - \int_{-\infty}^{x} f(x)dx\right)^n\right]' =$

$= -n\left(1 - \int_{-\infty}^{x} f(x)dx\right)^{n-1}\left(1 - \int_{-\infty}^{x} f(x)dx\right)' = n\left(1 - \int_{-\infty}^{x} f(x)dx\right)^{n-1} f(x)$. Тобто

$$f(X_{\max}) = n\left(1 - \int_{-\infty}^{x} f(x)dx\right)^{n-1} f(x) .$$

Теорема. Нехай $x \in R$ і область $D_x \subseteq R^2$ складається з точок (x_1, x_2), таких, що $g(x_1, x_2) < x$. Тоді випадкова величина $\eta = g(\xi_1, \xi_2)$ має функцію розподілу

$$F_\eta(x) = p((\xi_1, \xi_2) \in D_x) = \iint\limits_{D_x} f_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2)dx_1dx_2 .$$

Зауваження. Мається на увазі, що випадкові величини ξ_1 и ξ_2 незалежні, тобто $f_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2) = f_{\xi_1}(x_1) \cdot f_{\xi_2}(x_2)$.

Висновок (Формула згортки). Якщо випадкові величини ξ_1 та ξ_2 незалежні і мають абсолютно неперервний розподіл зі щільностями $f_{\xi_1}(x_1)$ та $f_{\xi_2}(x_2)$, то щільність розподілу суми $\xi_1 + \xi_2$ дорівнює «згортки» щільностей $f_{\xi_1}(x_1)$ та $f_{\xi_2}(x_2)$:

$$f_{\xi_1+\xi_2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(u) \cdot f_{\xi_2}(t-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(t-u) \cdot f_{\xi_2}(u)du .$$

Приклад I. Унаслідок експериментальних досліджень установлено, що похибка, зумовлена шумом аналогових елементів аналогово-цифрового перетворювача (АЦП) комп’ютеризованої системи контролю (КСК), –

випадкова величина X, що має нормальний закон розподілу, тобто, $X \sim N(a;\sigma^2)$. А похибка квантування – випадкова величина Y, що має рівномірний розподіл, тобто $Y \sim U(a;b)$, де a та b залежать від розрядності АЦП. Під час розв'язання задач метрологічного забезпечення КСК виникає необхідність установлення закону розподілу сумарної похибки $Z = X + Y$ та її статистичних характеристик: $m(Z), D(Z), \sigma(Z)$.

Приклад II. Час між запитами до сервера комп'ютерної мережі є випадковою величиною X, що має експоненціальний закон розподілу з параметром λ c^{-1}, тобто: $X \sim \mathrm{E}(\lambda)$. Для дослідження ступеня використання сервера необхідно встановити закон розподілу максимумів випадкової величини X, тобто, деякої випадкової величини $Z = \max(X)$ та її характеристик: $m(Z), D(Z), \sigma(Z)$.

3 ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ

Примітка. Римська цифра у дужках вказує на тип задачі, загальне формулювання якої наведено вище.

1. $X \sim N(a;\sigma^2)$, $Y \sim E(\lambda)$.(I)
2. $X \sim N(a_1;\sigma_1^2)$, $Y \sim N(a_2;\sigma_2^2)$.(I)
3. $X \sim N(a;\sigma^2)$, $Y \sim U(a;b)$.(I)
4. 5. $X \sim U(a;b)$, $Y \sim U(a;b)$.(I)
6. $X \sim U(-a;a)$, $Y \sim U(-\frac{a}{2};\frac{a}{2})$.(I)
7. $X \sim E(\lambda_1)$, $Y \sim E(\lambda_2)$.(I)
8. $X \sim U(0;2\pi)$. $Z = \sin X$. (II)
9. $X \sim U(0;2\pi)$. $Z = \cos X$. (II).

10. $X \sim U(0;\pi)$. $Z = \sin X$. (II)

11. $X \sim U(0;\pi)$. $Z = \cos X$. (II).

12. $X \sim U(a;b)$. $Z = \max(X)$.(II).

13. $X \sim U(a;b)$. $Z = \min(X)$.(II).

14. $X \sim E(\lambda)$. $Z = \max(X)$.(II).

15. $X \sim E(\lambda)$. $Z = \min(X)$.(II).

16. $X \sim N(a;\sigma^2)$. $Z = \max(X)$.(II).

17. $X \sim N(a;\sigma^2)$. $Z = \min(X)$.(II).

4 КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ЯКОСТІ ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО–ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

Розрахунково-графічну роботу студенти виконують у 2-му семестрі. Максимальна кількість балів, яку отримують студенти за виконання РГР, складає 15 балів: 5 – «задовільно», 10 – «добре», 15 – «відмінно».

Шкала оцінювання: національна та ECTS

<table>
<tr><th rowspan="2">Сума балів за всі види навчальної діяльності</th><th rowspan="2">Оцінка ECTS</th><th colspan="2">Оцінка за національною шкалою</th></tr>
<tr><th>Для іспиту, курсового проекту (роботи), практики</th><th>Для заліку</th></tr>
<tr><td>90 – 100</td><td>A</td><td>Відмінно</td><td rowspan="5">Зараховано</td></tr>
<tr><td>82 – 89</td><td>B</td><td rowspan="2">Добре</td></tr>
<tr><td>74 – 81</td><td>C</td></tr>
<tr><td>64 – 73</td><td>D</td><td rowspan="2">Задовільно</td></tr>
<tr><td>60 – 63</td><td>E</td></tr>
<tr><td>35 – 59</td><td>FX</td><td>Незадовільно з можливістю повторного складання</td><td>Не зараховано з можливістю повторного складання</td></tr>
<tr><td>0 – 34</td><td>F</td><td>Незадовільно з обов’язковим повторним вивченням навчальної дисципліни</td><td>Не зараховано з обов’язковим повторним вивченням навчальної дисципліни</td></tr>
</table>

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. Чистяков В. П. Курс теории вероятностей: учеб. 3-е изд., испр. М.: Наука, Гл. Ред. Физ.-мат. Лит. 1987.

2. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учеб. Пособие для втузов. Изд-е 5-е, перераб и доп., М., "Высш. Школа", 1977.

3. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа,1977 г.

4. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. Учеб.

5. Смирнов Н. В., Дунин-Барковский Ч. В. Курс теории вероятностей и математической статистики. М.: «Наука», 1969 г.

6. Андрухаев Х. М. Сборник задач по теории вероятностей. М.: «Просвещение», 1985 г.

7. Вентцель Е. С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей. М.: «Наука», 1973 г.

8. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. М.: Высшая школа,1987 г.

9. Пугачев В. С. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. З. Павловский. Введение в математическую статистику. - М., "Статистика", 1967.

10. С. А. Айвазян, И. С. Енюков, Л. Д, Мешалкин. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. Справочное издание. - М.: Финансы и статистика, 1983.

11. А.В. Крайников, Б.А. Курдиков и др. Вероятностные методы в вычислительной технике: Учебное пособие для вузов по спец. ЭВМ/ и др. Под ред. А.Н. Лебедева и Е.А. Чернявского. - М.: Высш. шк., 1986.

12. Методика установления вида математической модели распределения погрешностей МИ 199-79.

13. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим: Методические рекомендации. Часть I. Критерии типа χ^2. Проект, 2-я редакция, Издательство стандартов, Москва.

Ддодаткова

1. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ: В 2-х кН. Кн. 1/ Пер.с англ. – 2-е изд., перераб. И доп. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 366 с.

2. С. А. Айвазян, И. С. Енюков, Л. Д, Мешалкин. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. Справочное издание. - М.: Финансы и статистика, 1983.

3. В. П. Боровиков, И. П. Боровиков. STATISTICA - Статистический анализ и обработка данных в среде Windows. - М.: Информационно-издательский дом "Филин", 1997.

4. В. П. Боровиков. Популярное введение в программу STATISTICA. - М.: КомпьютерПресс, 1998

Інформаційні ресурси

1. Бібліотека Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, м. Кременчук, вул. Першотравнева, 20.

2. Електронні джерела:

- http://www.intuit.ru;
- http://www. http://www.twirpx.com/library/;
- http://habrahabr.ru/posts/telecommunications/;
- http://habrahabr.ru/posts/hardware/;
- http://www.studfiles.ru/dir/cat32/subj58/file8429/view78371.html.

ДОДАТОК А

Зразок оформлення титульної сторінки звіту виконання індивідуального завдання

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО

Кафедра комп'ютерних та інформаційних систем

РОЗРАХУНКОВА РОБОТА
з навчальної дисципліни **«Теорія ймовірностей та математична статистика»**

Тема «Функції від випадкових величин та їх характеристики»

Студент гр._________ПІБ_____________
Керівник _________ПІБ_____________

Кременчук 2020

Методичні вказівки щодо виконання розрахунково-графічної роботи з навчальної дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика» для студентів денної форми навчання для спеціальностей 122 «Комп’ютерні науки» та 123 «Комп’ютерна інженерія».

Укладач к. т. н., доц. В. М. Сидоренко

Відповідальний за випуск зав. кафедри КІС В. М. Сидоренко

Підп. до др. ______________. Формат 60×84 1/16. Папір тип. Друк ризографія.

Ум. друк. арк. ____. Наклад _______ прим. Зам. №___________. Безкоштовно.

Редакційно–видавничий відділ
Кременчуцького національного університету
імені Михайла Остроградського
вул. Першотравнева, 20, м. Кременчук, 39600