МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ ЕЛЕКТРИЧНОЇ ІНЖЕНЕРІЇ
ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ЩОДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ
З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
«ФІЗИКА»
ДЛЯ СТУДЕНТІВ ДЕННОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ
ЗІ СПЕЦІАЛЬНОСТІ 171 – «ЕЛЕКТРОНІКА»
ОСВІТНЬО-ПРОФЕСІЙНОЇ ПРОГРАМИ «ТЕХНОЛОГІЯ,
ОБЛАДНАННЯ ТА ВИРОБНИЦТВО ЕЛЕКТРОННОЇ ТЕХНІКИ»
ОСВІТНЬОГО СТУПЕНЯ «БАКАЛАВР»

КРЕМЕНЧУК 2022

Методичні вказівки щодо практичних занять з навчальної дисципліни «Фізика» для студентів денної форми навчання зі спеціальності 171 – «Електроніка» освітньо-професійної програми «Технологія, обладнання та виробництво електронної техніки» освітнього ступеня «Бакалавр»

Укладачі: к. т. н., доц. В. О. Мосьпан,
к. т. н., доц. О. О. Юрко
Рецензент к. т. н., доц. Д. В. Кухаренко

Кафедра комп`ютерної інженерії та електроніки

Затверджено методичною радою Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського
Протокол № ___ від ___ ____________ 2022 року
Голова методичної ради проф. В. В. Костін

ЗМІСТ

ВСТУП

«Фізика» є однією з фундаментальних теоретичних дисциплін базової підготовки фахівців за спеціальністю 171 – Електроніка.

Мета навчального курсу загальної фізики – формування фундаментальних базових знань і набуття навичок практичної роботи у сфері електрики, магнетизму, оптики, фізики атомів і атомних явищ, фізики атомного ядра і частинок. Розглядаються питання практичного застосування досліджуваних фізичних явищ.

На початковому етапі вивчення навчального курсу студентові необхідні знання елементів векторної алгебри та математичного аналізу (в обсязі шкільної програми). Під час подальшого вивчення навчального курсу коло використовуваних у ньому понять розширюється і відповідно до матеріалу, що вивчається в навчальних курсах «Вищої математики» і «Основи електроніки».

Методичні вказівки розроблені відповідно до робочої навчальної програми та охоплюють основні питання змістових модулів: «Електричний струм і магнітне поле струмів» (модуль 1-й), «Електричні коливання та хвилі» (модуль 2-й).

Після вивчення навчальної дисципліни студент повинен:

– *знати*: основні визначення та поняття різних розділів фізики, а саме: електрика і магнетизм; фізика коливань і хвиль; елементи хвильової оптики; квантова теорія випромінювання; фізика напівпровідників і твердого тіла;

– *уміти*: розв'язувати типові задачі з різних розділів фізики з можливістю їх подальшого використання у професійно-орієнтованих дисциплінах під час аналізу конкретних прикладних задач, проведенні розрахунків і виконанні проектів.

1 ПЕРЕЛІК ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

Практичне заняття № 1

Тема. Закон Кулона. Взаємодія заряджених тіл

Мета: засвоїти основні співвідношення заємодії заряджених тіл.

Короткі теоретичні відомості

Закон Кулона:

– у векторній формі (позначення векторної величини може бути здійснено двома рівнозначними способами: стрілкою над величиною $\left(\vec{F}, \vec{E} \text{ та ін.}\right)$ або жирним шрифтом без курсиву ($\mathbf{F}, \mathbf{E}$ та ін.)

$$\vec{F}_{12} = \mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r},$$

де $\mathbf{F}_{12}$ – сила, що діє на точковий заряд Q_1 з боку точкового заряду Q_2 ($\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$); $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – електрична стала; ε – діелектрична проникність середовища; $\vec{r}_{12} = \boldsymbol{r}_{12}$ – радіус-вектор, спрямований від заряду Q_2 до заряду Q_1;

– у скалярній формі

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{Q_1 Q_2}{r^2} = k\frac{Q_1 Q_2}{\varepsilon r^2},$$

де $k = 1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

Закон збереження заряду:

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i = const,$$

тобто алгебраїчна сума зарядів, що входять до електрично ізольованої системи, залишається незмінною.

Приклад 1.1 Три однакові позитивні заряди $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1$ нКл розміщені по вершинах рівнобічного трикутника (рис. 1.1). Який негативний заряд Q_4 потрібно розмістити у центрі трикутника, щоб сила притягування з його боку врівноважувала б сили взаємного відштовхування зарядів, які знаходяться у вершинах?

Розв'язок

1. Усі три заряди, розміщені по вершинах трикутника, перебувають у рівних умовах. Тому для розв'язування задачі достатньо виявити, який заряд слід розмістити у центрі трикутника, щоб один із трьох зарядів, наприклад Q_1, перебував у рівновазі. За принципом суперпозиції на заряд діятиме кожен заряд незалежно від решти. Тому заряд Q_1 перебуватиме у рівновазі, якщо векторна сума сил, що діють на нього, дорівнюватиме нулю:

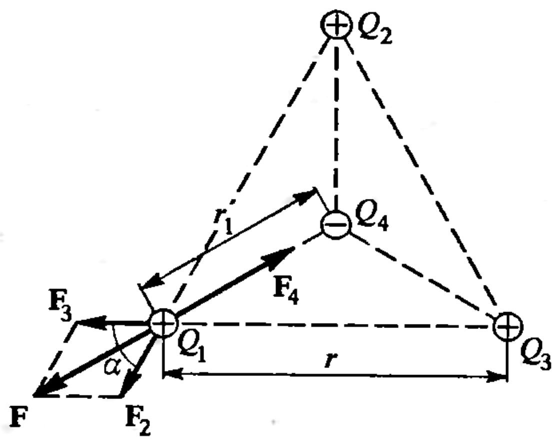

Рисунок 1.1

$$\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 = \mathbf{F} + \mathbf{F}_4 = 0, \qquad (1.1)$$

де $\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4$ – сили, що діють на заряд Q_1 з боку зарядів Q_2, Q_3 та Q_4; $\mathbf{F}$ – рівнодіюча сил $\mathbf{F}_2$ та $\mathbf{F}_3$.

Оскільки сили $\mathbf{F}$ та $\mathbf{F}_4$ лежать на одній прямій (див. рис. 1.1), то векторне рівняння (1.1) можна замінити скалярною сумою:

$$F - F_4 = 0, \text{ або } F_4 = F.$$

2. Виразивши в останній рівності F через F_2 та F_3 і враховуючи, що $F_2 = F_3$, одержимо:

$$F_4 = F_2\sqrt{2(1+\cos\alpha)}.$$

3. За законом Кулона з урахуванням, що $Q_1 = Q_2 = Q_3$, знайдемо

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{Q_1 Q_4}{r_1^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{Q_1^2}{r^2}\sqrt{2(1+\cos\alpha)}, \qquad (1.2)$$

звідки

$$Q_4 = \frac{Q_1^2 r_1^2}{r^2}\sqrt{2(1+\cos\alpha)}.$$

4. З геометричних побудов у рівнобічному трикутнику маємо, що

$$r_1 = \frac{\frac{r}{2}}{\cos 30°} = \frac{r}{2\cos 30°} = \frac{r}{\sqrt{3}};$$

$$\cos\alpha = \cos 60° = \frac{1}{2}.$$

5. З урахуванням цього формула (2) набуває вигляду:

$$Q_4 = \frac{Q_1}{\sqrt{3}}.$$

Підставляючи значення $Q_1 = 1$нКл, одержимо

$$Q_4 = 0{,}58 \text{ нКл}.$$

Зазначимо, що рівновага системи зарядів є нестійкою.

Приклад 1.2 Дві заряджені кульки, що підвішені на нитках однакової довжини, опускають у гас із густиною 0,8 г/см^3. Якою має бути густина матеріалу кульок, щоб кут розходження ниток у повітрі та у гасі був однаковим? Діелектрична проникність гасу $\varepsilon = 2$.

Розв'язок

1. Оскільки обидві кульки перебувають в однакових умовах, достатньо розглянути систему сил, що діятимуть на одну з кульок у гасі та повітрі. У загальному випадку на кульку діятимуть чотири сили: сила тяжіння $m\mathbf{g}$, сила Кулона $\mathbf{F}_\text{К}$, сила Архімеда $\mathbf{F}_\text{А}$ та сила пружності нитки $\mathbf{T}$, яка врівноважує дії трьох перших сил (див. рис. 1.2).

Значення сил визначимо за відповідними законами:

$$m\text{g} = \rho_\text{к} V_\text{к} \text{g},$$

де $\rho_\text{к}, V_\text{к}$ – відповідно густина матеріалу кульки та її об'єм;

$$F_\text{К} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2};$$

де ε – діелектрична проникність середовища, у якому перебувають кульки (для повітря $\varepsilon \approx 1$, а для гасу $\varepsilon_\text{г} = 2$);

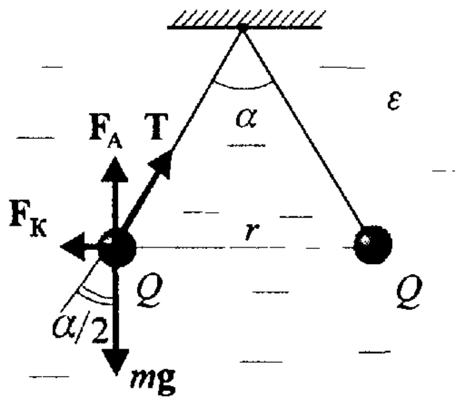

Рисунок 1.2

$$F_\text{А} = \rho_\text{г} V_\text{к} \text{g},$$

де $\rho_г = 0{,}8 \text{ г/см}^3 = 0{,}8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ – густина гасу (силою Архімеда, що діятиме на кульки у повітрі, нехтують).

2. Перейдемо до скалярних співвідношень і з урахуванням рис. 1.2 визначимо величину кута розходження ниток α для обох середовищ:

– для повітря:

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{F_{Кп}}{mg} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{1}{mg} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{1}{\rho_к V_к g};$$

– для гасу:

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{F_{Кг}}{mg - F_А} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_г r^2}\frac{1}{(\rho_к V_к g - \rho_г V_к g)}.$$

3. Оскільки в обох середовищах величина кута розходження ниток є однаковою, то порівнюючи два попередні вирази, після очевидних спрощень, одержимо:

$$\frac{1}{\rho_к} = \frac{1}{\varepsilon_г(\rho_к - \rho_г)}.$$

4. Розв'язуючи одержане співвідношення відносно $\rho_к$, одержимо остаточно:

$$\rho_к = \frac{\varepsilon_г\rho_г}{\varepsilon_г - 1}.$$

Підставивши числові значення, визначимо:

$$\rho_к = \frac{2 \cdot 0{,}8 \cdot 10^3}{2 - 1} = 1{,}6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Приклад 1.3 Два заряди $9Q$ та $-Q$ закріплені на відстані l один від другого. Третій заряд Q_1 може переміщуватись лише вздовж прямої, що проходить через заряди. Визначте положення заряду Q_1, при якому він перебуватиме у рівновазі. При якому знаку заряду рівновага буде стійкою?

Розв'язок

1. Заряд Q_1 перебуватиме у рівновазі, якщо векторна сума сил, що діятимуть на нього, дорівнюватиме нулю. Це означатиме, що на заряд Q_1 мають діяти дві рівні за модулем і протилежні за напрямком сили.

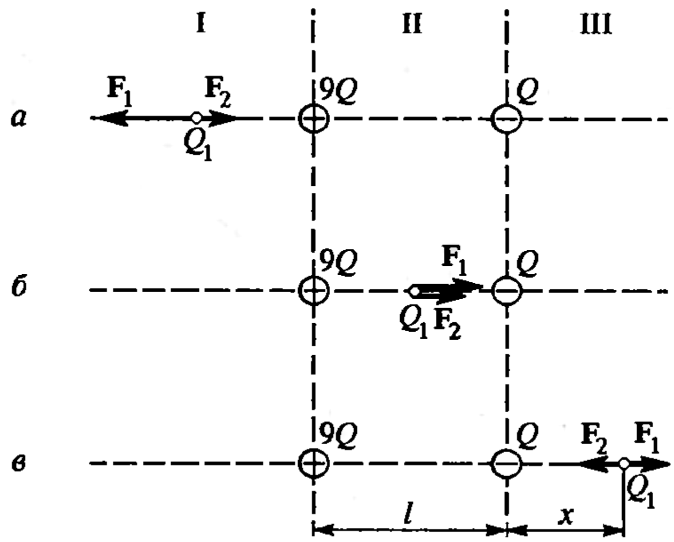

Рисунок 1.3

2. На рис. 1.3 зображені всі можливі варіанти розміщення зарядів. З'ясуємо, на який із трьох ділянок I, II чи III може бути виконаною умова рівноваги. Для визначеності вважатимемо, що заряд Q_1 є позитивним.

На ділянці I (рис. 1.3, a) на заряд Q_1 діятимуть дві протилежно напрямлені сили $\mathbf{F}_1$ та $\mathbf{F}_2$. Сила $\mathbf{F}_1$, що діє з боку заряду $9Q$, у будь-якій точці цієї ділянки буде більшою за силу $\mathbf{F}_2$, що діє з боку заряду $-Q$, оскільки більший за величиною заряд $9Q$ завжди буде ближчим до заряду Q_1, ніж менший заряд $-Q$. Тому рівновага на цій ділянці неможлива.

На ділянці II (рис. 1.3, $б$) обидві сили $\mathbf{F}_1$ та $\mathbf{F}_2$ спрямовані в один бік (до заряду $-Q$). Отже, рівновага на цій ділянці також є неможливою.

На ділянці III (рис. 1.3, $в$) сили $\mathbf{F}_1$ та $\mathbf{F}_2$ напрямлені протилежно, так само, як і на ділянці I, але тепер менший за модулем заряд $(-Q)$ завжди перебуває від заряду Q_1 на відстані меншій, ніж більший заряд $9Q$. Отже, можна визначити таку точку на прямій, де сили $\mathbf{F}_1$ та $\mathbf{F}_2$ будуть рівними за модулем, тобто:

$$|\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2|. \tag{1.3}$$

3. Нехай відстань від меншого заряду до заряду Q_1 дорівнює x, тоді відстань від більшого заряду становитиме $(l + x)$. Виразивши у (1.3) величини сил за законом Кулона, матимемо:

$$\frac{9QQ_1}{(l+x)^2} = \frac{QQ_1}{x^2}.$$

Скоротивши на QQ_1 після вилучення з обох частин квадратного кореня, одержимо:

$$l + x = \pm 3x.$$

Звідки маємо:

$$x_1 = +\frac{l}{2};\ x_2 = -\frac{l}{4}.$$

Корінь x_2 не задовольняє фізичну умову задачі (у цій точці обидві сили хоч і є рівними за модулем, але напрямлені в один бік).

Тому розв'язком задачі є:

$$x_1 = \frac{l}{2}.$$

4. Визначимо знак заряду Q_1, при якому рівновага буде стійкою.

Скористаємось тим, що рівновагу називають стійкою, якщо за малого зміщення заряду від положення рівноваги утворюються сили, що повертатимуть його у положення рівноваги.

1. Якщо заряд Q_1 є позитивним, то зі зміщенням його ліворуч обидві сили F_1 і F_2 збільшиватимуться, але F_1 збільшуватиметься повільніше (заряд $9Q$ завжди знаходиться віддаленіше, ніж заряд $-Q$). Отже, $F_2 > F_1$, і на заряд діятиме результуюча сила, напрямлена також ліворуч. Під дією цієї сили заряд Q_1 буде віддалятися від положення рівноваги. Те саме відбувається і зі зміщенням заряду Q_1 праворуч. Сила F_2 згасатиме швидше, ніж F_1. Векторна сума цих сил також буде напрямлена праворуч, тобто віддалятиме заряд Q_1 від положення рівноваги.

2. Якщо заряд Q_1 негативний, то його зміщення ліворуч спричинить зільшення сил F_1 та F_2, але сила F_1 збільшуватиметься повільніше за F_2, тобто $F_2 > F_1$. Результуюча сила буде напрямленою праворуч і повертатиме заряд Q_1 у положення рівноваги. Зі зміщенням заряду Q_1 праворуч сила F_2 згасатиме швидше за F_1, тобто $F_1 > F_2$, і результуюча сила знову повертатиме заряд Q_1 у

положення рівноваги. Отже, з негативним зарядом рівновага буде стійкою. Величина самого заряду Q_1 не є суттєвою.

Слід зазначити, що в електростатиці стійка рівновага є можливою лише за певних обмежень. У нашому прикладі заряд Q_1 може переміщуватись лише вздовж прямої, що з'єднує заряди $(-Q)$ та $(9Q)$. Якщо це обмеження зняти, то стійкої рівноваги не буде. За теоремою Ірншоу, у системі зарядів, що перебувають під дією лише електростатичних сил, стійка рівновага неможлива.

Приклад 1.1.4 Тонкий стрижень завдовжки $l = 30$ см (рис. 1.4) несе рівномірно розподілений за довжиною заряд з лінійною щільністю $\tau = 1$ мкКл/м. На відстані $r_0 = 20$ см від стрижня знаходиться заряд $Q_1 = 10$ нКл, рівновіддалений від кінців стрижня. Визначити силу F взаємодії точкового заряду зі стрижнем.

Розв'язок

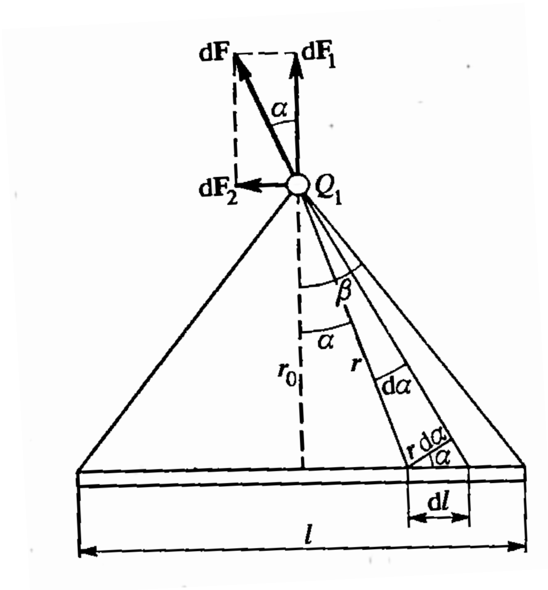

Рисунок 1.4

1. Закон Кулона дозволяє визначити силу взаємодії точкових зарядів. За умовою задачі, один із зарядів не є точковим, а рівномірно розподілений по довжині стрижня. Однак, якщо на стрижні виокремити малу ділянку завдовжки dl, то заряд, що припадає на цю ділянку, можна вважати точковим, величина якого складає $dQ = \tau dl$.

2. Тоді, за законом Кулона, сила взаємодії між зарядами Q_1 та dQ:

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1\tau dl}{r^2}, \tag{1.4}$$

де r – відстань від виділеної ділянки до заряду Q_1.

3. З рис. 1.4 маємо, що

$$r = \frac{r_0}{\cos\alpha}\ ; \quad dl = \frac{r d\alpha}{\cos\alpha}.$$

4. Підставляючи ці вирази до (1.4), одержимо:

$$dF = \frac{Q_1 \tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0} d\alpha. \tag{1.5}$$

Слід мати на увазі, що $d\mathbf{F}$ є вектором, тому перед інтегруванням, розкладемо його на дві складові: $d\mathbf{F}_1$, перпендикулярну до стрижня, та $d\mathbf{F}_2$, паралельну до стрижня.

5. З рис. 1.4 видно, що величини складових

$$dF_1 = dF\cos\alpha\,; \;\; dF_2 = dF\sin\alpha.$$

6. Підставивши до цих формул значення dF з (1.5), одержимо:

$$dF_1 = \frac{Q_1 \tau \cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0} d\alpha\,;$$

$$dF_2 = \frac{Q_1 \tau \sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0} d\alpha.$$

7. Після інтегрування в межах від $-\beta$ до $+\beta$, матимемо:

$$F_1 = \int_{-\beta}^{+\beta} \frac{Q_1 \tau \cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0} d\alpha = \frac{Q_1 \tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \int_{-\beta}^{+\beta} \cos\alpha\, d\alpha = \frac{Q_1 \tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \sin\alpha \Big|_{-\beta}^{+\beta} =$$

$$= \frac{Q_1 \tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0} [\sin\beta - \sin(-\beta)] = \frac{Q_1 \tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0} 2\sin\beta\,;$$

$$F_1 = \frac{Q_1 \tau}{2\pi\varepsilon_0 r_0} \sin\beta.$$

Через симетрію розміщення заряду Q_1 відносно стрижня інтегрування другої складової дає нуль, дійсно:

$$F_2 = \frac{Q_1 \tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \int_{-\beta}^{+\beta} \sin\alpha\, d\alpha = -\frac{Q_1 \tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \cos\alpha \Big|_{-\beta}^{+\beta} = 0.$$

8. Отже, сила, що діятиме на заряд Q_1,

$$F = F_1 = \frac{Q_1 \tau}{2\pi\varepsilon_0 r_0} \sin\beta. \tag{1.6}$$

9. З рис. 1.4 видно, що

$$\sin\beta = \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{r_0^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}} = \frac{l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2}}.$$

10. Підставивши цей вираз до (1.6), одержимо остаточно:

$$F = F_1 = \frac{Q_1\tau}{2\pi\varepsilon_0 r_0}\frac{l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2}}. \tag{1.7}$$

11. Перевіримо розмірність одержаної величини:

$$[F] = \frac{[Q_1][\tau][l]}{[\varepsilon_0][r_0][l]} = \frac{\text{Кл}\cdot\frac{\text{Кл}}{\text{м}}\cdot\text{м}}{\frac{\text{Ф}}{\text{м}}\cdot\text{м}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Кл}^2}{\frac{\text{Кл}}{\text{В}}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}} = \text{Н}.$$

12. Підставимо числові значення:

$$F = \frac{10\cdot10^{-9}\cdot1\cdot10^{-6}}{2\cdot\pi\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot0{,}2\cdot\sqrt{4\cdot0{,}2^2+0{,}3^2}} = 5{,}4\cdot10^{-4}\text{Н} = 0{,}54\text{ мН}.$$

Завдання до теми

1. Обчислити співвідношення електростатичної та гравітаційної сил взаємодії між двома електронами.

2. Обчислити співвідношення електростатичної та гравітаційної сил взаємодії між двома протонами.

3. Визначити, за якого значення питомого заряду (q/m) електрона, сили електростатичної та гравітаційної взаємодії були б рівними за модулем.

4. Визначити, за якого значення питомого заряду (q/m) протона, сили електростатичної та гравітаційної взаємодії були б рівними за модулем.

5. На двох однакових краплях води знаходиться по одному зайвому електрону, причому сила електричного відштовхування крапель урівноважує силу їх взаємного тяжіння. Визначити радіуси крапель.

6. Два точкові заряди, перебуваючи у повітрі $(\varepsilon = 1)$ на відстані $r_1 =$ 20 см один від одного, взаємодіють з певною силою. На яку відстань необхідно помістити ці заряди в трансформаторну олива $(\varepsilon = 2{,}2)$, щоб одержати ту саму силу взаємодії.

7. Два точкові заряди, перебуваючи у повітрі $(\varepsilon = 1)$ на відстані $r_1 = 20$ см один від одного, взаємодіють з певною силою. На яку відстань необхідно помістити ці заряди в ацетон $(\varepsilon = 21{,}5)$, щоб одержати вдвічі більшу силу взаємодії.

8. Два точкові заряди, перебуваючи у повітрі $(\varepsilon = 1)$ на відстані $r_1 = 20$ см один від одного, взаємодіють з певною силою. На яку відстань необхідно помістити ці заряди в бензол $(\varepsilon = 2{,}3)$, щоб одержати половинну силу взаємодії.

9. Два точкові заряди, перебуваючи у повітрі $(\varepsilon = 1)$ на відстані $r_1 = 20$ см один від одного, взаємодіють з певною силою. На яку відстань необхідно помістити ці заряди у воду $(\varepsilon = 80{,}4)$, щоб одержати в десять разів більшу силу взаємодії.

10. Два точкові заряди, перебуваючи у повітрі $(\varepsilon = 1)$ на відстані $r_1 = 20$ см один від одного, взаємодіють з певною силою. На яку відстань необхідно помістити ці заряди в нітробензол $(\varepsilon = 36{,}4)$, щоб одержати втричі більшу силу взаємодії.

Контрольні питання

1. Сформулюйте закон збереження електричного заряду.
2. Наведіть закон Кулона у векторній формі.
3. Наведіть закон Кулона у скалярній формі.
4. Сформулюйте принцип суперпозиції електричних полів.
5. Наведіть графічне зображення електричних полів.

Література: [1, 3].

Практичне заняття № 2

Тема. Напруженість електричного поля. Електричне зміщення

Мета: засвоїти основні характеристики електричного поля.

Короткі теоретичні відомості

Напруженість електричного поля в точці

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q},$$

де $\mathbf{F}$ – сила, що діє на точковий позитивний заряд Q, уміщений у дану точку поля.

Сила, що діятиме на точковий заряд Q, уміщений в електричне поле

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}.$$

Потік вектора напруженості **E** електричного поля:

а) через довільну поверхню S, розміщену в неоднорідному полі

$$\Phi_E = \int\limits_S E\cos\alpha\, dS, \qquad \text{або} \qquad \Phi_E = \int\limits_S E_n dS,$$

де α – кут між вектором напруженості **E** і нормаллю **n** до елементу поверхні; E_n – проєкція вектора напруженості на нормаль;

б) через плоску поверхню, уміщену в однорідне електричне поле

$$\Phi_E = ES\cos\alpha.$$

Потік вектора напруженості ***E*** через замкнену поверхню

$$\Phi_E = \oint E_n dS,$$

де інтегрування ведеться по всій поверхні.

Теорема Остроградського-Гаусса. Потік вектора напруженості **E** через будь-яку замкнену поверхню, що охоплює заряди $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$:

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\sum_{i=1}^{n} Q_i,$$

де $\sum_{i=1}^{n} Q_i$ – алгебраїчна сума зарядів, розміщених усередині замкненої поверхні; n – кількість зарядів.

Напруженість електричного поля, створеного точковим зарядом Q на відстані r від заряду

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\varepsilon r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \qquad \text{або} \qquad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\varepsilon r^2},$$

де $\mathbf{r}/r$ – одиничний радіус-вектор, напрямлений від заряду Q до точки, у якій визначається $\mathbf{E}$.

Напруженість електричного поля, створеного металевою сферою радіусом R, що несе заряд Q, на відстані r від центра сфери:

а) усередині сфери $(r < R)$

$$E = 0;$$

б) на поверхні сфери $(r = R)$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\varepsilon R^2};$$

в) поза сферою $(r > R)$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\varepsilon r^2}.$$

Принцип суперпозиції (накладання) електричних полів, за яким напруженість $\boldsymbol{E}$ результуючого поля, створеного N точковими зарядами, дорівнює векторній (геометричній) сумі напруженостей полів окремих зарядів:

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}_i \, .$$

У разі накладання двох електричних полів з напруженостями $\mathbf{E}_1$ та $\mathbf{E}_2$ модуль результуючого вектора напруженості визначається за теоремою косинусів:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha}\,,$$

де α – кут між векторами $\mathbf{E}_1$ та $\mathbf{E}_2$.

Напруженість поля, створеного нескінченно довгою рівномірно зарядженою ниткою (або циліндром) на відстані r від її осі:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\tau}{\varepsilon r},$$

де τ – лінійна щільність заряду.

Лінійна щільність заряду є величиною, яка дорівнює відношенню заряду, розподіленого вздовж нитки, до довжини нитки (циліндра)

$$\tau = \frac{\Delta Q}{\Delta l}.$$

Напруженість поля, створеного нескінченою рівномірно зарядженою площиною

$$E = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon},$$

де σ – поверхнева щільність заряду.

Поверхнева щільність заряду є величиною, яка дорівнює відношенню заряду, розподіленого вздовж поверхні, до площі цієї поверхні

$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta S}.$$

Напруженість поля, створеного двома паралельними нескінченними рівномірно і протилежно зарядженими площинами з однаковою за модулем поверхневою щільністю σ заряду (поле плоского конденсатора)

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

Подана формула є справедливою для обчислення напруженості поля між пластинами плоского конденсатора (у середній його частині) лише тоді, коли відстань між пластинами є набагато меншою за лінійні розміри пластин конденсатора.

Електричне зміщення (електрична індукція) **D** пов'язане з напруженістю **E** електричного поля співвідношенням

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}.$$

Це співвідношення є справедливим лише для ізотропних діелектриків.

Потік вектора електричного зміщення виражають аналогічно до потоку вектора напруженості електричного поля:

а) для однорідного поля потік через плоску поверхню:

$$\Delta\Psi = D \cdot \Delta S \cos\alpha;$$

б) у випадку неоднорідного поля і довільної поверхні:

$$\Psi = \int D_n dS,$$

де D_n – проєкція вектора **D** на напрям нормалі до елемента поверхні, площа якого дорівнює dS.

Теорема Остроградського–Гаусса. Потік вектора електричного зміщення крізь будь-яку замкнену поверхню, що охоплює заряди $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$

$$\Psi = \sum_{i=1}^{n} Q_i \,,$$

де n – кількість зарядів (із своїм знаком), що містяться всередині замкненої поверхні.

Приклад 2.1 Електричне поле створено двома точковими зарядами: $Q_1 = 30$ нКл; $Q_2 = -10$ нКл. Відстань d між зарядами дорівнює 20 см. Визначити напруженість електричного поля у точці, що знаходиться на відстані $r_1 = 15$ см від першого та $r_2 = 10$ см від другого зарядів.

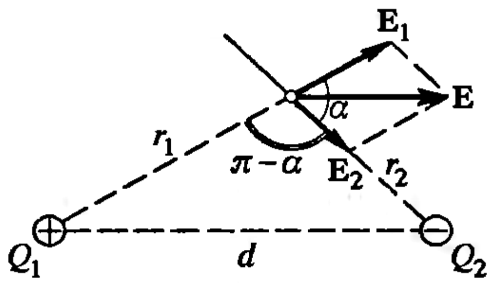

Рисунок 2.1

Розв’язок

1. За принципом суперпозиції електричних полів, кожен заряд створює поле незалежно від присутності у просторі інших зарядів. Тому напруженість **E** електричного поля у шуканій точці визначиться векторною сумою напруженостей $\mathbf{E}_1$ та $\mathbf{E}_2$ полів, створених кожним зарядом окремо: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$.

2. Напруженості електричного поля, створеного у вакуумі першим і другим зарядами, відповідно дорівнюватимуть:

$$E_1 = \frac{|Q_1|}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}; \;\; E_2 = \frac{|Q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}. \tag{2.1}$$

3. За рис. 2.1, вектор $\mathbf{E}_1$ напрямлений по силовій лінії від заряду Q_1, оскільки заряд $Q_1 > 0$; вектор $\mathbf{E}_2$ також напрямлений по силовій лінії, але до заряду Q_2, оскільки заряд $Q_2 < 0$.

4. Модуль вектора E знайдемо за теоремою косинусів:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha}, \qquad (2.2)$$

де кут α може бути знайденим з трикутника зі сторонами r_2, r_2, d:

$$\cos\alpha = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}.$$

Щоб скоротити громіздкі записи формул, обчислимо значення $\cos\alpha$ окремо. З наведеної вище формули одержимо:

$$\cos\alpha = 0{,}25.$$

5. Підставимо (2.1) до (2.2) і, виносячи загальний множник $1/(4\pi\varepsilon_0)$ за знак кореня, одержимо:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{Q_1^2}{r_1^4} + \frac{Q_2^2}{r_2^4} + 2\frac{|Q_1||Q_2|}{r_1^2r_2^2}\cos\alpha}.$$

6. Підставивши чиселові значення, одержимо остаточно:

$$E = 9\cdot10^9\sqrt{\frac{(30\cdot10^{-9})^2}{(15\cdot10^{-2})^4} + \frac{(10\cdot10^{-9})^2}{(10\cdot10^{-2})^4} + 2\frac{(30\cdot10^{-9})(30\cdot10^{-9})}{(15\cdot10^{-2})^2(10\cdot10^{-2})^2}\cdot 0{,}25} =$$

$$= 1{,}67\cdot10^4\,\frac{\text{В}}{\text{м}} = 16{,}7\,\frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

Приклад 2.2 Електричне поле, створене двома паралельними нескінченними зарядженими площинами з поверхневою щільністю заряду $\sigma_1 = 0{,}4\ \text{мкКл/м}^2$ і $\sigma_2 = 0{,}1\ \text{мкКл/м}^2$. Визначити напруженість електричного поля, створеного цими зарядженими площинами.

Розв'язок

1. За принципом суперпозиції, поля, створені кожною зарядженою площиною окремо, накладаються одне на друге, причому кожна заряджена площина створює електричне поле незалежно від присутності другої зарядженої площини.

2. Напруженості однорідних електричних полів, створених першою та другою площинами, відповідно дорівнюють:

$$E_1 = \frac{1}{2}\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}; \;\; E_2 = \frac{1}{2}\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}.$$

3. Площини поділяють весь простір на три області: I, II та III (рис. 2.2).

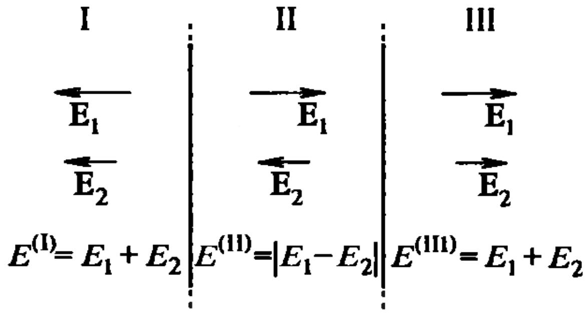

Рисунок 2.2

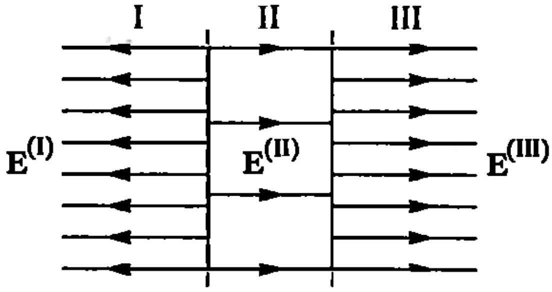

Рисунок 2.3

Як видно з рис. 2.2, в областях I та III електричні силові лінії обох полів напрямлені в один бік і відповідно, напруженості сумарних полів $E^{(\mathrm{I})}$ та $E^{(\mathrm{III})}$ у областях I та III будуть однаковими і дорівнюватимуть сумі напруженостей полів, створених першою та другою площинами:

$$E^{(\mathrm{I})} = E^{(\mathrm{III})} = E_1 + E_2 = \frac{1}{2}\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\varepsilon_0}.$$

В області II (між площинами) електричні силові лінії полів напрямлені у протилежні боки, і відповідно, напруженість поля $E^{(\mathrm{II})}$ визначиться різницею напруженостей полів, створених першою та другою площинами:

$$E^{(\mathrm{II})} = |E_1 - E_2| = \frac{1}{2}\frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{\varepsilon_0}.$$

4. Підставляючи чисові значення, одержимо:

$$E^{(\mathrm{I})} = E^{(\mathrm{III})} = 28{,}3 \text{ кВ/м}; \qquad E^{(\mathrm{II})} = 17 \text{ кВ/м}.$$

Картина розподілу силових ліній сумарного поля зображена на рис. 2.3.

Приклад 2.3 На пластинах плоского повітряного конденсатора знаходиться заряд $Q = 10$ нКл. Площа S кожної пластини конденсатора дорівнює 100 см^2. Визначити силу F, з якою притягуватимуться пластини. Поле між пластинами вважати однорідним.

Розв'язок

1. Заряд Q одної пластини знаходиться в полі, створеному зарядом другої пластини конденсатора. Тому на перший заряд діятиме сила (рис. 2.4)

$$F = E_1 Q_1, \qquad (2.3)$$

де E_1 – напруженість поля, створеного зарядом одної пластини.

2. Згадана вище напруженість поля пластини:

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}.$$

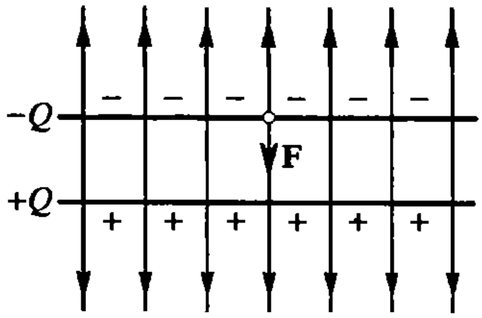

Рисунок 2.4

3. Підставляючи до (2.3), одержимо

$$F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}.$$

4. Перевіримо розмірність одержаної величини

$$[F] = \frac{[Q^2]}{[\varepsilon_0][S]} = \frac{\text{Кл}^2}{\frac{\text{Ф}}{\text{м}} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Кл}^2 \cdot \text{В}}{\text{Кл} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}} = \text{Н}.$$

Підставивши числові дані, одержуємо остаточно:

$$F = \frac{(10 \cdot 10^{-9})^2}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}} = 5{,}65 \cdot 10^{-4}\text{Н} = 565 \text{ мкН}.$$

Приклад 2.4 Електричне поле утворюється нескінченною площиною, зарядженою з поверхневою щільністю $\sigma = 400$ нКл/м^2, та нескінченною прямою ниткою, зарядженою з лінійною щільністю $\tau = 100$ нКл/м. На відстані $r = 10$ см від нитки знаходиться точковий заряд $Q = 10$ нКл. Визначити силу, що діятиме на заряд та її спрямування, якщо заряд і нитка перебувають в одній площині, паралельній до зарядженої площини.

Розв'язок

1. Сила, що діє на заряд, який знаходиться у полі:

$$F = EQ, \qquad (2.4)$$

де E – напруженість поля в точці, де перебуває заряд Q.

2. Визначимо напруженість E поля, створеного за умовою задачі нескінченною зарядженою площиною і нескінченною зарядженою ниткою. Поле, створене нескінченною зарядженою площиною є однорідним, і його напруженість у будь-якій точці

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,. \tag{2.5}$$

Поле, створене нескінченною зарядженою лінією, є неоднорідним. Його напруженість залежить від відстані та визначається за формулою:

$$E_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}\,. \tag{2.6}$$

3. За принципом суперпозиції електричних полів, напруженість поля в точці, де знаходиться заряд Q, дорівнює векторній сумі напруженостей $\mathbf{E}_1$ та $\mathbf{E}_2$ (рис. 2.5):

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2.$$

4. Оскільки вектори $\mathbf{E}_1$ та $\mathbf{E}_2$ взаємно перпендикулярні, то

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}\,.$$

Підставляючи до цієї формули (2.5) та (2.6), матимемо:

$$E = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon_0}\sqrt{\sigma^2 + \frac{\tau^2}{\pi^2 r^2}}\,.$$

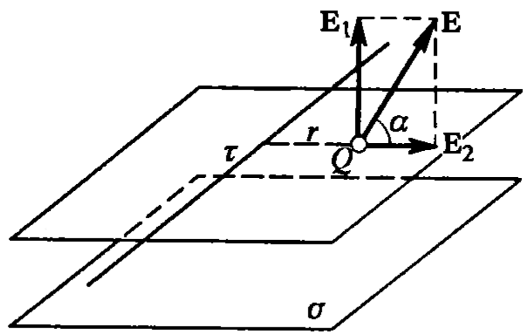

Рисунок 2.5

5. Для визначення сили, підставимо одержане значення напруженості до формули (2.4)

$$F = EQ = \frac{Q}{2\varepsilon_0}\sqrt{\sigma^2 + \frac{\tau^2}{\pi^2 r^2}}\,.$$

6. Перевіримо розмірність одержаної величини

$$[F] = \frac{[Q][\sigma]}{[\varepsilon_0]} = \frac{\text{Кл} \cdot \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}}{\frac{\text{Ф}}{\text{м}}} = \frac{\text{Кл}^2}{\frac{\text{Кл}}{\text{В}} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{В}}{\text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}} = \text{Н}.$$

Підставивши чиселові значення, одержимо:

$$F = \frac{10 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} \sqrt{(400 \cdot 10^{-9})^2 + \frac{(100 \cdot 10^{-9})^2}{\pi^2 \cdot 0{,}1^2}} = 289 \cdot 10^{-6}\text{Н} = 289 \text{ мкН}.$$

7. Напрямок сили F, що діятиме на позитивний заряд Q, збігатиметься з напрямком вектора напруженості **E** поля. Напрям же вектора **E** задається кутом α до зарядженої площини. З рис. 1.9 маємо, що

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_1}{E_2} = \pi r \frac{\sigma}{\tau}.$$

Звідки

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(\pi r \frac{\sigma}{\tau}\right).$$

Підставивши чиселові значення, одержимо

$$\alpha = 51°34'.$$

Приклад 2.5 Точковий заряд $Q = 25$ нКл знаходиться в полі, створеному прямим нескінченним циліндром радіусом $R = 1$ см, рівномірно зарядженим з поверхневою щільністю $\sigma = 2 \cdot 10^3$ нКл/м^2. Визначити сили, що діють на заряд, розміщений на осі циліндра на відстані $r = 10$ см.

Розв'язок

1. Сила, що діє на заряд Q, який знаходиться в полі

$$F = QE, \tag{2.7}$$

де E – напруженість поля в точці, у якій перебуває заряд Q.

2. Напруженість поля нескінченно довгого рівномірно зарядженого циліндра

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}, \tag{2.8}$$

де τ – лінійна щільність заряду.

3. Виразимо лінійну щільність τ через поверхневу щільність σ. Для цього виділимо елемент циліндра завдовжки l і виразимо заряд Q_1, що знаходиться на ньому, двома способами:

$$Q_1 = \sigma S = \sigma \cdot 2\pi R l \quad \text{та} \quad Q_1 = \tau l.$$

Прирівнюючи праві частини цих рівнянь, одержимо:

$$\tau l = \sigma \cdot 2\pi R l.$$

Звідки

$$\tau = 2\pi R \sigma.$$

4. З урахуванням цього (2.8) можна записати у вигляді:

$$E = \frac{R\sigma}{\varepsilon_0 r}.$$

5. Підставивши у (2.7), одержимо остаточно

$$F = QE = Q\frac{R\sigma}{\varepsilon_0 r}.$$

6. Перевіримо розмірність одержаної величини

$$[F] = \frac{[Q][R][\sigma]}{[\varepsilon_0][r]} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{м} \cdot \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}}{\frac{\text{Ф}}{\text{м}} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Кл}^2 \cdot \text{В}}{\text{Кл} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}} = \text{Н}.$$

Підставивши чиселові значення, одержимо

$$F = 25 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{1 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}1} = 565 \cdot 10^{-6}\text{Н} = 565 \text{ мкН}.$$

7. Напрямок сили **F** збігається з напрямком вектора напруженості **E**, який через симетрію (циліндр є нескінченно довгим) напрямлений перпендикулярно до осі циліндра.

Приклад 2.6 Електричне поле, створене тонкою нескінченно довгою ниткою, рівномірно зарядженою з лінійною щільністю $\tau = 30\ \text{нКл/м}$. На відстані $\text{a} = 20\ \text{см}$ від нитки знаходиться плоска круглий майданчик радіусом $r = 1\ \text{см}$. Визначити потік напруженості через цей майданчик, якщо його площина утворює кут $\beta = 30°$ з лінією напруженості, яка проходить через середину майданчика.

Розв'язок

1. Поле, створене нескінченною рівномірно зарядженою ниткою, є неоднорідним. Потік вектора напруженості за таких умов виражається інтегралом

$$\Phi_E = \int\limits_S E_n dS, \tag{2.9}$$

де E_n – проєкція вектора **E** на нормаль **n** до поверхні майданчика dS.

Інтегрування здійснюється за всією поверхнею майданчика, який пронизують лінії напруженості.

2. Проєкція E_n вектора напруженості за рис. 2.6 дорівнюватиме:

$$E_n = E\cos\alpha,$$

де α – кут між напрямком вектора **E** та нормаллю **n**.

3. З урахуванням цього формула (1) набуває вигляду:

$$\Phi_E = \int\limits_S E\cos\alpha\, dS.$$

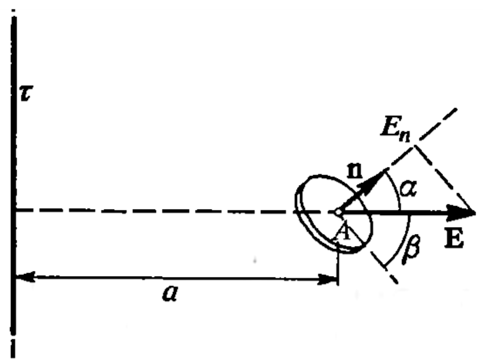

Рисунок 2.6

4. Оскільки розміри поверхні є малими порівняно до відстані від нитки $(r \ll a)$, то електричне поле в межах майданчика можна вважати практично однорідним. Отже, вектор напруженості дуже мало змінюватиметься за модулем і напрямком у межах майданчика, що дозволяє замінити під знаком інтеграла значення E та $\cos\alpha$ їх середніми значеннями $\langle E\rangle$ та $\langle\cos\alpha\rangle$ і винести їх за знак інтеграла:

$$\Phi_E = \int\limits_S \langle E\rangle\langle\cos\alpha\rangle dS = \langle E\rangle\langle\cos\alpha\rangle \int\limits_S dS.$$

5. Виконуючи інтегрування і замінюючи $\langle E\rangle$ та $\langle\cos\alpha\rangle$ їх наближеними значеннями E_{A} та $\cos\alpha_{\text{A}}$, обчисленими для середнього майданчика, одержимо:

$$\Phi_E = E_A \cos\alpha_A S = \pi r^2 E_A \cos\alpha_A. \tag{2.10}$$

6. Напруженість E_A може бути визначеною за формулою:

$$E_A = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 a}.$$

З рис. 2.6 маємо

$$\cos\alpha_A = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin\beta.$$

7. З урахуванням виразів для E_A та $\cos\alpha_A$ рівність (2.10) набуває вигляду:

$$\Phi_E = \frac{\pi r^2 \tau}{2\pi\varepsilon_0 a}\sin\beta = \frac{\tau r^2}{2\varepsilon_0 a}\sin\beta.$$

8. Перевіримо розмірність одержаної величини

$$[\Phi_E] = \frac{[r^2][\tau]}{[\varepsilon_0][a]} = \frac{\text{м}^2 \cdot \frac{\text{Кл}}{\text{м}}}{\frac{\text{Ф}}{\text{м}} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{В} \cdot \text{м}}{\text{Кл}} = \text{В} \cdot \text{м}.$$

Підставивши чиселові значення одержимо

$$\Phi_E = \frac{30 \cdot 10^{-9} \cdot (10^{-2})^2}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}2} = 0{,}424\ \text{В} \cdot \text{м}.$$

Приклад 2.7 Дві концентричні провідні сфери радіусами $R_1 = 6$ см і $R_2 = 10$ см несуть відповідно заряди $Q_1 = 1$ нКл та $Q_2 = -0{,}5$ нКл. Знайти напруженість поля в точках, що віддалені від центра сфер на відстані $r_1 = 5$ см, $r_2 = 9$ см та $r_3 = 15$ см. Побудувати графік $E(r)$.

Розв'язок

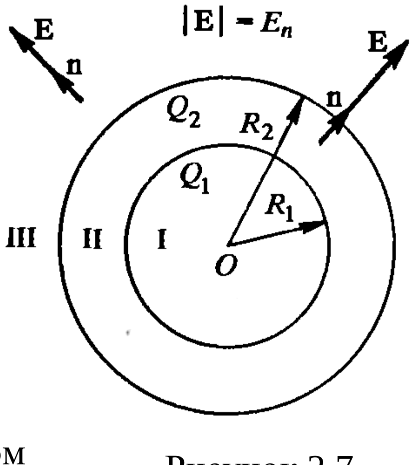

Рисунок 2.7

1. Зазначимо, що точки, у яких необхідно визначити напруженість електричного поля, належать трьом областям (рис. 1.11): область I ($r_1 < R_1$), область II ($R_1 < r_2 < R_2$), область III ($r_3 > R_2$).

2. Для визначення напруженості E_1 в області I проведемо сферичну поверхню S_1 радіусом r_1, і скористаємось теоремою Остроградського–

Гаусса. Оскільки всередині області I зарядів немає, то за згаданою теоремою одержимо:

$$\oint_{S_1} E_n dS = 0, \qquad (2.11)$$

де E_n – нормальна складова напруженості електричного поля.

З міркувань симетрії нормальна складова E_n має дорівнювати самій напруженості та бути постійною для всіх точок сфери, тобто $E_n = E_1 = const$. Тому її можна винести за знак інтеграла. Рівність (2.11) за таких умов набуває вигляду:

$$E_1 \oint_{S_1} dS = 0.$$

Оскільки площа сфери не дорівнює нулю, то

$$E_1 = 0,$$

тобто напруженість поля у всіх точках, що задовольняють умову $(r_1 < R_1)$, дорівнюватиме нулю.

2. В області II сферичну поверхню проведемо радіусом r_2. Оскільки всередині цієї поверхні знаходиться заряд Q_1, то для неї, за теоремою Остроградського–Гаусса, можна записати рівність:

$$\oint_{S_2} E_n dS = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}. \qquad (2.12)$$

Оскільки $E_n = E_2 = const$, то з умов симетрії маємо

$$E_2 \oint_{S_2} dS = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}.$$

Або

$$E_2 S_2 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}.$$

Тоді

$$E_2 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0 S_2}.$$

Оскільки

$$S_2 = 4\pi r_2^2,$$

одержимо остаточно

$$E_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}.$$

3. В області III сферичну поверхню проводимо радіусом r_3. Ця поверхня охоплюватиме сумарний заряд $(Q_1 + Q_2)$. Отже, за теоремою Остроградського–Гаусса матимемо:

$$\oint_{S_3} E_n dS = \frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon_0}.$$

Тоді аналогічно до попереднього випадку

$$E_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_3^2}. \quad (2.13)$$

4. Пересвідчимось, що праві частини рівностей (2.12) та (2.13) мають розмірність напруженості електричного поля

$$[E] = \frac{[Q]}{[\varepsilon_0][r^2]} = \frac{1\text{ Кл}}{1\frac{\text{Ф}}{\text{м}} \cdot 1\text{м}^2} = \frac{1\text{Кл}}{1\text{Ф} \cdot 1\text{м}} = 1\frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Підставивши всі числові значення величин у системі СІ, одержимо:

$$E_2 = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-9}}{(0{,}09)^2} = 1{,}11 \cdot 10^3\text{В/м} = 1{,}11\text{ кВ/м}.$$

$$E_3 = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(1 - 0{,}5)10^{-9}}{(0{,}15)^2} = 200\text{В/м}.$$

5. Побудуємо графік $E(r)$:

а) в області I $(r_1 < R_1)$ $E_1 = 0$;

б) в області II $(R_1 < r_2 < R_2)$ напруженість $E_2(r)$ змінюється за законом $(1/r^2)$. У точці $r = R_1$ напруженість поля

$$E_2(R_1) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} = 2500\text{ В/м}.$$

У точці $r = R_2$ (r стрімить до R_2 зліва)

$$E_2(R_2) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} = 900 \text{ В/м};$$

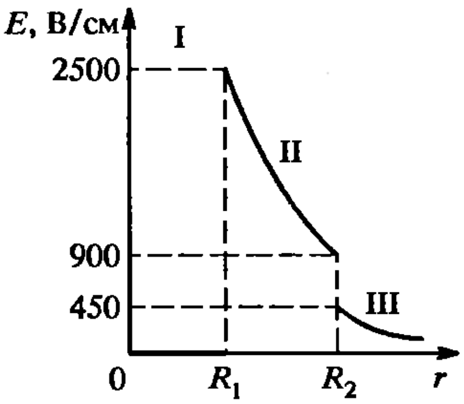

Рисунок 2.8

в) в області III ($r_3 > R_2$) $E_3(r)$ змінюється за законом $(1/r^2)$, причому в точці $r = R_2$ (r прямує до R_2 справа)

$$E_3(R_2) = \frac{Q_1 - |Q_2|}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} = 450 \text{ В/м}.$$

Отже, функція $E(r)$ у точках $r = R_1$ та $r = R_2$ має розриви. Графік функції $E(r)$ зображений на рис. 2.8.

Завдання до теми

1. Визначити силу F, що діє на заряд $q = 70$ нКл, якщо заряд уміщений на відстані $r = 2$ см від зарядженої нитки з лінійною щільністю заряду $\tau = 0{,}2$ мкКл/м. Діелектрична проникність середовища $\varepsilon = 6$.

2. Визначити силу F, що діє на заряд $q = 70$ нКл, якщо заряд уміщений в поле зарядженої площини з поверхневою щільністю заряду $\sigma = 20$ мкКл/м^2. Діелектрична проникність середовища $\varepsilon = 6$.

3. Визначити силу F, що діє на заряд $q = 70$ нКл, якщо заряд уміщений на відстані $r = 2$ см від поверхні зарядженої кулі радіусом $R = 2$см і поверхневою щільністю заряду $\sigma = 20$ мкКл/м^2. Діелектрична проникність середовища $\varepsilon = 6$.

4. На рис. 1.1 AA – заряджена нескінченна площина з поверхневою щільністю заряду $\sigma = 40$ мкКл/м^2 і B – однойменно заряджена кулька з масою $m = 1$ г і зарядом $q = 1$ нКл. Який кут α з площиною AA утворює нитка, на якій висить кулька?

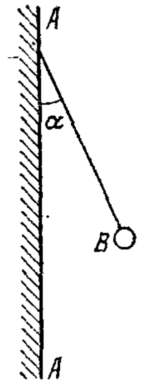

Рисунок 2.9

5. На рис. 2.9 AA – заряджена нескінченна площина і B – однойменно заряджена кулька з масою $m = 0{,}4$ г і зарядом $q = 667$ пКл. Сила натягування нитки, на якій висить кулька, $T =$

0,49 мН. Знайти поверхневу щільність заряду σ на площині AA.

6. З якою силою F_l електричне поле зарядженої нескінченної площини діє на одиницю довжини зарядженої нескінченно довгої нитки, поміщеної в це поле? Лінійна щільність заряду на нитці $\tau = 3$ мкКл/м і поверхнева щільність заряду на площині $\sigma = 20$ мкКл/м^2.

7. З якою силою F_l на одиницю довжини відштовхуються дві однойменно заряджені нескінченно довгі нитки з однаковою лінійною щільністю заряду $\tau = 3$ мкКл/м, які перебувають на відстані $r_1 = 2$ см одна від одної?

8. Дві довгі однойменно заряджені нитки розміщені на відстані $r = 10$ см одна від одної. Лінійна щільність заряду на нитках $\tau_1 = \tau_2 = 10$ мкКл/м. Знайти модуль і напрямленість напруженості Е результуючого електричного поля в точці, що знаходиться на відстані $a = 10$ см від кожної нитки.

9. З якою силою F_S на одиницю площі відштовхуються дві однойменно заряджені нескінченно довгі площини? Поверхнева щільність заряду на площинах $\sigma = 0{,}3$ мкКл/м^2.

10. Мідна куля радіусом $R = 0{,}5$ см перебуває в оливі. Густина оливи $\rho_м = 0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3. Знайти заряд q кулі, якщо в однорідному електричному полі шар був вивішеним в оливі. Електричне поле напрямлене вертикально вгору і його напруженість $E = 3{,}6$ МВ/м.

Контрольні питання

1. Визначте напруженість електричного поля точкового заряду.

2. Визначте поле двох нескінченних паралельних протилежно заряджених площин.

3. Визначте поле рівномірно зарядженої сферичної поверхні.

4. Визначте поле рівномірно зарядженої кулі.

5. Визначте напруженість поля рівномірно зарядженої нескінченної прямолінійної нитки (або циліндра).

Література: [1, 3].

Практичне заняття № 3

Тема. Потенціал. Енергія системи електричних зарядів. Робота з переміщення заряду в полі

Мета: засвоїти основні характеристики взаємодії системи електричних зарядів з електричним полем.

Короткі теоретичні відомості

Потенціал електричного поля

$$\varphi = \frac{\Pi}{Q},$$

де П – потенційна енергія точкового заряду, уміщеного у дану точку поля, за умови, що його потенційна енергія на нескінченності прийнята такою, що дорівнює нулю.

Потенціал електричного поля, створений точковим зарядом Q на відстані r від заряду:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}.$$

Потенціал електричного поля, створеного металевою сферою радіуса $R,$ що несе заряд $Q,$ на відстані r від центра сфери

– усередині сфери $(r < R)$

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R};$$

– на поверхні сфери $(r = R)$

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R};$$

– поза сферою $(r > R)$

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}.$$

У всіх наведених вище формулах для потенціалу зарядженої сфери ε являє собою діелектричну проникність однорідного нескінченного діелектрика, що оточує сферу.

Потенціал електричного поля, створеного системою з n точкових зарядів у даній точці, за принципом суперпозиції електричних полів дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, створених окремими точковими зарядами $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \, .$$

Енергія W взаємодії системи точкових зарядів $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ визначається роботою, яку ця система зарядів може здійснити у разі їх віддалення один від одного у нескінченність, і виражається формулою:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i \varphi_i,$$

де φ_i – потенціал поля, створеного всіма $(n-1)$ зарядами (за винятком i-го) в точці, де розміщено заряд Q_i.

Потенціал зв’язаний з напруженістю електричного поля співвідношенням

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi.$$

Для електричного поля, що має сферичну симетрію, цей зв’язок визначається формулою:

$$\mathbf{E} = -\frac{d\varphi}{dr}\frac{\mathbf{r}}{r},$$

або в скалярній формі

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}\, .$$

Для однорідного поля, тобто поля, напруженість якого в кожній точці є однаковою як за модулем, так і за напрямленістю

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d},$$

де φ_1 та φ_2 – потенціали точок двох еквіпотенціальних поверхонь; d – відстань між цими поверхнями вздовж електричної силової лінії.

Робота, що здійснюється електричним полем під час переміщення точкового заряду Q з одної точки поля, яка має потенціал φ_1, до другої, що має потенціал φ_2, дорівнює:

$$A = Q(\varphi_1 - \varphi_2),$$

або

$$A = Q\int_L E_l dl,$$

де E_l – проєкція вектора напруженості **E** на напрямок переміщення; dl – переміщення.

Для однорідного поля остання формула набуває вигляду

$$A = QEl\cos\alpha,$$

де α – кут між напрямками вектора напруженості **E** і переміщення **l**; l – модуль переміщення.

Циркуляція вектора напруженості поля є величиною, що чисельно дорівнює роботі з переміщення одиничного точкового позитивного заряду вздовж замкненого контура. Циркуляцію виражають інтегралом по замкненому контуру $\oint E_l dl$, де E_l – проєкція вектора напруженості **E** в даній точці контуру на напрямок дотичної до контура в тій самій точці.

Для електростатичного поля циркуляція вектора напруженості дорівнює нулю:

$$\oint_L E_l dl = 0.$$

Приклад 3.1 Позитивні заряди $Q_1 = 3$ мкКл і $Q_2 = 0{,}02$ мкКл знаходяться у вакуумі на відстані $r_1 = 1{,}5$ м один від одного. Визначити роботу A', яку необхідно здійснити для зближення зарядів на відстань $r_2 = 1{,}0$ м.

Розв'язок

1. Припустимо, що перший заряд Q_1 залишається нерухомим, а другий Q_2 під дією зовнішніх сил переміщується в полі, створеному зарядом Q_1, наближуючись до нього з відстані $r_1 = 1{,}5$ м до $r_2 = 1{,}0$ м.

2. Робота A' зовнішньої сили з переміщення заряду Q з одної точки поля з потенціалом φ_1 до другої, з потенціалом φ_2, дорівнює по модулю і є протилежною за знаком роботі сил електричного поля з переміщення заряду між тими самими точками:

$$A' = -A.$$

3. Робота A сил поля з переміщення заряду:

$$A = Q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Тоді робота A' зовнішніх сил

$$A' = -Q(\varphi_1 - \varphi_2) = Q(\varphi_2 - \varphi_1). \qquad (3.1)$$

4. Потенціали точок початку та кінця шляху виразимо формулами:

$$\varphi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}; \;\; \varphi_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2}.$$

5. Підставляючи до (3.1) і враховуючи, що в нашому випадку $Q = Q_2$, одержимо:

$$A' = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Підставивши чисельні значення, визначимо

$$A' = 9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}02 \cdot 10^{-6} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1{,}5}\right) = 180 \text{ мкДж}.$$

Приклад 3.2 Знайти роботу A з переміщення заряду $Q = 10$ нКл з точки 1 у точку 2 (рис. 3.1), що знаходиться між двома різнойменно зарядженими з поверхневою щільністю $\sigma = 0{,}4 \text{ мкКл/м}^2$ нескінченними паралельними площинами, відстань l між якими дорівнює 3 см.

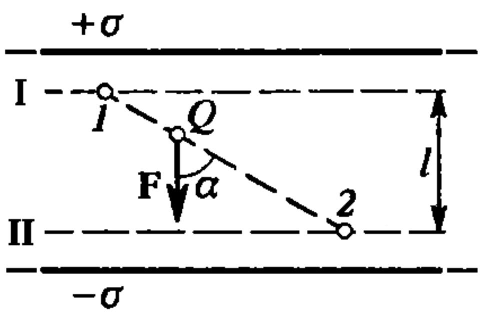

Рисунок 3.1

Розв'язок

Можливі два способи розв'язання задачі.

1-й спосіб. Роботу сил поля з переміщення заряду Q з точки 1 поля з потенціалом φ_1 у точку поля 2 з потенціалом φ_2 визначимо за формулою:

$$A = Q(\varphi_1 - \varphi_2). \qquad (3.2)$$

1.1 Для визначення потенціалів точок 1 та 2 проведемо через ці точки еквіпотенціальні поверхні I та II. Ці поверхні будуть площинами, оскільки поле між двома рівномірно зарядженими нескінченними площинами є однорідним. Для такого поля справедливе співвідношення

$$\varphi_1 - \varphi_2 = El, \qquad (3.3)$$

де E – напруженість поля; l – відстань між еквіпотенціальними поверхнями.

1.2 Напруженість поля між паралельними нескінченними різнойменно зарядженими площинами

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

1.3 Підставивши цей вираз до (3.3), а потім отриманий вираз до (3.2), одержимо

$$A = Q\frac{\sigma}{\varepsilon_0}l.$$

2-й спосіб. Оскільки поле є однорідним, то сила, що діятиме на заряд Q під час його переміщення, буде сталою. Тому роботу з переміщення заряду з точки 1 у точку 2 можна визначити за формулою:

$$A = F\Delta r\cos\alpha, \qquad (3.4)$$

де F – сила, що діє на заряд; Δr – модуль переміщення заряду Q з точки 1 у точку 2; α – кут між напрямками переміщення і сили.

2.1 Сила, що діятиме на заряд Q в полі з напруженістю E

$$F = QE = Q\frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

2.2 Підставляючи цей вираз до (3.4), з урахуванням, що

$$\Delta r\cos\alpha = l,$$

одержимо

$$A = Q\frac{\sigma}{\varepsilon_0}l. \qquad (3.5)$$

Отже, обидва способи призвели до однакового результату.

2.3 Перевіримо розмірність одержаної величини

$$[A] = \frac{[Q][\sigma][l]}{[\varepsilon_0]} = \frac{1\text{Кл} \cdot 1\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} \cdot 1\text{м}}{1\frac{\Phi}{\text{м}}} = \frac{\text{Кл}^2}{\frac{\text{Кл}}{\text{В}}} = \text{Кл} \cdot \text{В} = \text{Дж}.$$

Підставивши числові значення, одержимо

$$A = 10 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{0{,}4 \cdot 10^{-6}}{8{,}85 \cdot 10^{-12}} \cdot 3 \cdot 10^{-2} = 13{,}6 \cdot 10^{-6}\text{Дж} = 13{,}6\ \text{мкДж}.$$

Приклад 3.3 Уздовж тонкої нитки, що зігнута у дугу кола радіусом R, рівномірно розподілено заряд з лінійною щільністю $\tau = 10$ нКл/м. Визначити напруженість **E** і потенціал φ електричного поля, що створюється таким розподіленим зарядом у точці O, яка збігається із центром кривизни дуги. Довжина нитки l складає третину довжини кола і дорівнює 15 см.

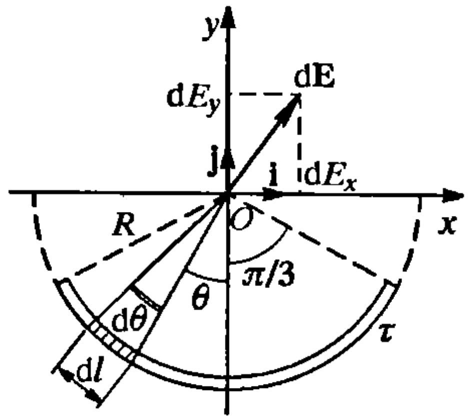

Рисунок 3.2

Розв'язок

1. Виберемо осі координат так, щоб початок координат збігався із центром кривизни дуги, а вісь Y була симетрично розміщена відносно кінців дуги (рис. 3.2). На нитці виділимо елемент довжини dl. Заряд $dQ = \tau dl$, що знаходиться на виділеній ділянці, можна вважати точковим.

2. Визначимо напруженість електричного поля в точці O. Для цього визначимо спочатку напруженість $d\mathbf{E}$ поля, створеного зарядом dQ:

$$d\mathbf{E} = \frac{\tau\, dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\mathbf{r}}{r},$$

де **r** – радіус-вектор, напрямлений від елемента dl до точки, напруженість у якій визначається.

3. Виразимо вектор $d\mathbf{E}$ через його проєкції dE_x та dE_y на осі координат

$$d\mathbf{E} = \mathbf{i}dE_x + \mathbf{j}dE_y,$$

де **i** та **j** – одиничні вектори напрямків (орти).

4. Напруженість **E** визначимо інтегруванням:

$$\mathbf{E} = \int_l d\mathbf{E} = \mathbf{i}\int_l dE_x + \mathbf{j}\int_l dE_y.$$

Інтегрування ведеться вздовж дуги завдовжки l. Через симетрію

$$\int_l dE_x = 0.$$

Тоді

$$\mathbf{E} = \mathbf{j}\int_l dE_y, \tag{3.6}$$

де

$$dE_y = dE\cos\theta = \frac{\tau\, dl}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta.$$

Оскільки $r = R = const; dl = Rd\theta,$ то

$$dE_y = \frac{\tau\, Rd\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\cos\theta\, d\theta.$$

5. Підставимо знайдений вираз для dE_y до (3.6) і, прийнявши до уваги симетрію розташування дуги відносно осі Oy, границі інтегрування візьмемо від 0 до $\pi/3$, а результат подвоїмо:

$$\mathbf{E} = \mathbf{j}\frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\theta\, d\theta = \mathbf{j}\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 R}\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}.$$

6. Виразимо R через довжину дуги

$$3l = 2\pi R; \quad R = \frac{3l}{2\pi}.$$

7. Після інтегрування у вибраних границях, матимемо:

$$\mathbf{E} = \mathbf{j}\frac{\tau}{6\varepsilon_0 l}\sqrt{3}.$$

З отриманої формули видно, що вектор **E** буде напрямленим уздовж додатного напрямку осі OY.

8. Підставивши числові значення, одержимо

$$E=\frac{10\cdot 10^{-9}\cdot\sqrt{3}}{6\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}15}=2{,}18\cdot 10^{3}\text{В/м}=2{,}18\ \text{кВ/м}.$$

9. Визначимо потенціал електричного поля в точці O. Для цього спочатку визначимо потенціал $d\varphi$, створений точковим зарядом dQ в точці O:

$$d\varphi=\frac{\tau\, dl}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

10. Замінимо r на R і здійснимо інтегрування

$$\varphi=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^l dl=\frac{\tau l}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

11. Оскільки

$$l=\frac{2\pi R}{3},$$

$$\varphi=\frac{\tau}{6\varepsilon_0}=\frac{10\cdot 10^{-9}}{6\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}=188\ \text{В}.$$

Приклад 3.4 Електричне поле, створене довгим циліндром радіусом $R=1$ см, рівномірно зарядженим з лінійною щільністю $\tau=20$ нКл/м. Визначити різницю потенціалів двох точок цього поля, що знаходяться на відстанях $a_1=0{,}5$ см та $a_2=2{,}0$ см від поверхні циліндра в середній його частині.

Розв'язок

1. Для визначення різниці потенціалів застосуємо співвідношення

$$\mathbf{E}=-\text{grad}\,\varphi.$$

Для поля з осьовою симетрією, яким є поле циліндра, можна записати

$$E=-\frac{d\varphi}{dr}\,;\qquad d\varphi=-Edr.$$

2. Інтегруючи останній вираз, знайдемо різницю потенціалів двох точок, що віддалені на відстані r_1 та r_2 від осі циліндра:

$$\varphi_2-\varphi_1=-\int_{r_1}^{r_2} Edr\,. \tag{3.7}$$

3. Оскільки циліндр є довгим і точки вибрані поблизу його середньої частини, то для визначення напруженості поля можна скористатися формулою:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

4. Підставивши цей вираз для E у формулу (3.7), матимемо

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}; \text{ або}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}. \tag{3.8}$$

5. Оскільки величини r_2 та r_1 входять до формули у вигляді відношення, то їх можна виразити у будь-яких, але однакових одиницях:

$$r_1 = R + a_1 = 1{,}5 \text{ см}; \quad r_2 = R + a_2 = 3 \text{ см}.$$

6. Підставивши числові дані до (3.8), визначимо остаточно

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{20\cdot 10^{-9}}{2\cdot\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\ln\frac{3}{1{,}5} = 250 \text{ В}.$$

Приклад 3.5 Електричне поле створено тонким стрижнем, що несе рівномірно розподілений за довжиною заряд $\tau = 0{,}1$ мкКл/м. Визначити потенціал φ поля в точці, віддаленій від кінців стрижня на відстань, що дорівнює довжині стрижня.

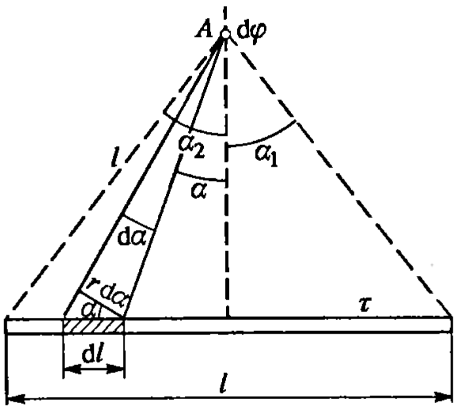

Рисунок 3.3

Розв'язок

1. Заряд, що знаходиться на стрижні, не можна вважати точковим, тому неможливе безпосереднє застосування для визначення потенціалу формули:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}, \tag{3.9}$$

оскільки ця формула є справедливою тільки для точкових зарядів. Тому застосуємо вже відомий спосіб, що полягає у розбитті стрижня на елементарні відрізки dl, заряд τdl яких можна вважати точковим. Тоді матимемо

$$d\varphi = \frac{\tau\, dl}{4\pi\varepsilon_0 r}, \tag{3.10}$$

де r – відстань від точки, у якій визначається потенціал, до елемента стрижня.

2. З рис. 3.3 маємо:

$$dl = \frac{r d\alpha}{\cos\alpha}.$$

Підставивши це значення до (3.10), знайдемо

$$d\varphi = \frac{\tau\, d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 \cos\alpha}.$$

3. Інтегруючи одержаний вираз у межах від α_1 до α_2, одержимо потенціал, створений усім зарядом, розподіленим уздовж стрижня:

$$\varphi = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\tau\, d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 \cos\alpha} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\cos\alpha}.$$

Через симетрію розташування точки A відносно кінців стрижня маємо $\alpha_2 = \alpha_1$ і тому

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\cos\alpha} = 2\int_{0}^{\alpha_1} \frac{d\alpha}{\cos\alpha}.$$

Отже,

$$\varphi = \frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0} \int_{0}^{\alpha_1} \frac{d\alpha}{\cos\alpha}.$$

Оскільки

$$\int \frac{d\alpha}{\cos\alpha} = \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C\,,$$

$$\varphi = \frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}.$$

Підставивши границі інтегрування, одержимо

$$\varphi = \frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}.$$

4. Підставляючи числові значення, матимемо остаточно

$$\varphi = 9\cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-6} \cdot \ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = 990 \text{ В}.$$

Приклад 3.6 Електрон зі швидкістю $\upsilon = 1{,}83 \cdot 10^6 \text{м/с}$ влетів в однорідне електричне поле у напрямку, протилежному вектору напруженості поля. Яку різницю потенціалів U має пройти електрон, щоб набути енергію $E_i = 13{,}6$ еВ (маючи таку енергію, електрон під час зіткнення з атомом водню може іонізувати його. Енергія 13,6 еВ має назву енергії іонізації водню)?

Розв'язок

1. Електрон повинен пройти таку різницю потенціалів U, щоб набута ним при цьому енергія W у сумі з кінетичною енергією T, яку мав електрон перед входженням у поле, дорівнювала енергії іонізації E_i, тобто

$$W + T = E_i.$$

2. Визначимо величини складових енергій

$$W = eU; \quad T = \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

3. Отже,

$$eU + \frac{m\upsilon^2}{2} = E_i.$$

Звідки маємо

$$U = \frac{2E_i - m\upsilon^2}{2e} = \frac{2 \cdot 13{,}6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} - 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot (1{,}83 \cdot 10^6)^2}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 4{,}15 \text{ В}.$$

Приклад 3.7 Визначити початкову швидкість υ_0 зближення протонів, що знаходяться на достатньо великій відстані один від другого, якщо мінімальна відстань r_{min}, на яку вони можуть зблизитися, дорівнює 10^{-11}см.

Розв'язок

1. Між двома протонами діють сили відштовхування, унаслідок чого рух протонів буде вповільненим. Тому задачу можна розв'язувати як в інерційній системі координат (зв'язаній із центром мас двох протонів), так і в неінерційній (зв'язаній з одним з протонів, що прискорено рухається). У другому випадку закони Ньютона не діють. Застосування ж принципу Даламбера ускладнено тим, що прискорення системи буде змінним. Тому задачу зручно розглядати в інерційній системі відліку.

2. Розмістимо початок координат у центрі мас двох протонів. Оскільки маємо справу з двома однаковими частинками, то центр мас перебуватиме у точці, що ділить навпіл відрізок, який з'єднує частинки. Відносно центра мас частинки матимуть будь-який момент часу однакові за модулем швидкості. Коли частинки перебувають на достатньо великій відстані одна від одної, швидкість v_1 кожної частинки дорівнюватиме половині v_0, тобто

$$v_1 = \frac{v_0}{2}.$$

3. Для розв'язування задачі застосуємо закон збереження енергії, за яким повна механічна енергія ізольованої системи тіл є незмінною

$$E = T + \Pi = const,$$

де T – сума кінетичних енергій обох протонів відносно центра мас; Π – потенційна енергія системи зарядів.

4. Виразимо потенційні енергії у початковий Π_1і заключний Π_2 моменти руху.

У початковий момент, за умовою задачі, протони перебували на значній відстані, тому потенційною енергією можна нехтувати ($\Pi_1 = 0$). Отже, для початкового моменту повна енергія дорівнюватиме кінетичній енергії протонів, тобто

$$E = T_1. \tag{3.11}$$

У заключний момент, коли протони максимально зблизяться, їх швидкість і кінетична енергія дорівнюватимуть нулю, а повна енергія буде визначатися потенційною енергією Π_2, тобто

$$E = \Pi_2. \tag{3.12}$$

Прирівнюючи праві частини (1) та (2), одержимо

$$T_1 = \Pi_2. \tag{3.13}$$

5. Кінетична енергія дорівнює сумі кінетичних енергій протонів

$$T_1 = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = mv_1^2 = \frac{mv_0^2}{4}. \tag{3.14}$$

6. Потенційна енергія системи двох зарядів Q_1та Q_2, що знаходяться у вакуумі, визначається за формулою

$$\Pi = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

де r – відстань між зарядами.

Користуючись цією формулою, одержимо:

$$\Pi_2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{min}}. \tag{3.15}$$

7. З урахуванням (3.14) та (3.15) формула (3.13) набуває вигляду

$$\frac{mv_0^2}{4} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{min}}.$$

Звідки

$$v_0 = \frac{e}{\sqrt{\pi\varepsilon_0 m r_{min}}}.$$

8. Перевіримо розмірність одержаної величини

$$[v_0] = \frac{[e]}{\{[\varepsilon_0][m][r_{min}]\}^{0,5}} = \frac{1\text{Кл}}{\left\{1\frac{\text{Ф}}{\text{м}} \cdot 1\text{кг} \cdot 1\text{м}\right\}^{0,5}} = \frac{1\text{Кл}}{\left\{1\frac{\text{Кл}}{\text{В}} \cdot 1\text{кг} \cdot \frac{\text{В}}{\text{В}}\right\}^{0,5}} =$$

$$= \frac{1\text{Кл} \cdot \text{В}}{\{1\text{Дж} \cdot 1\text{кг}\}^{0,5}} = \frac{1\text{Дж} \cdot \text{с}}{1\text{кг} \cdot \text{м}} = \frac{1\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{1\text{кг} \cdot \text{м}} = \frac{1\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}}{1\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2} = 1\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Підставивши числові значення, знаходимо

$$v_0 = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}}{\sqrt{\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 1{,}672 \cdot 10^{-27} \cdot 10^{-13}}} = 2{,}35 \cdot 10^6 \text{м/с}.$$

Приклад 3.8 Електрон без початкової швидкості пройшов різницю потенціалів $U_0 = 10$ кВ і влетів у простір між пластинами плоского конденсатора, зарядженого до різниці потенціалів $U_1 = 100$ В, уздовж лінії AB, паралельної до пластин (рис. 3.4). Відстань d між пластинами дорівнює 2 см. Довжина l_1 пластин конденсатора у напрямку прольоту електрона дорівнює 20 см. Визначити відстань BC на екрані P, віддаленому від конденсатора на $l_2 = 1$ м.

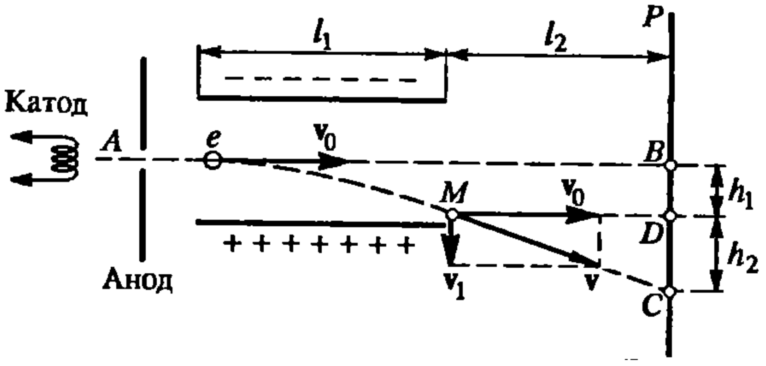

Рисунок 3.4

Розв'язок

1. Рух електрона всередині конденсатора складається з двох рухів:

1) за інерцією вздовж лінії AB із сталою швидкістю υ_0, набутою під дією різниці потенціалів U_0, яку електрон пройшов до конденсатора;

2) рівномірно прискореного руху у вертикальному напрямку до позитивно зарядженої пластини під дією постійної сили поля конденсатора.

Після виходу з конденсатора електрон рухатиметься рівномірно зі швидкістю υ, яку він мав у точці M у момент вильоту з конденсатора.

2. З рис. 3.4 видно, що шукана відстань

$$|BC| = h_1 + h_2,$$

де h_1 – відстань, на яку зміститься електрон у вертикальному напрямку під час руху в конденсаторі; h_2 – відстань між точкою D на екрані, у яку влучив би електрон, рухаючись після виходу з конденсатора за напрямком початкової швидкості υ_0, та точкою C, у яку електрон влучає в дійсності. Виразимо окремо h_1 та h_2.

3. Користуючись формулою довжини шляху рівномірно прискореного руху, знайдемо:

$$h_1 = \frac{at^2}{2}, \qquad (3.16)$$

де a – прискорення, набуте електроном під дією поля конденсатора; t – час прольоту електрона всередині конденсатора.

4. За другим законом Ньютона

$$a = \frac{F}{m},$$

де F – сила, з якою поле діятиме на електрон; m – маса електрона.

5. У свою чергу,

$$F = eE = \frac{eU_1}{d},$$

де e – заряд електрона; U_1 – різниця потенціалів між пластинами конденсатора; d – відстань між ними.

6. Час польоту електрона всередині конденсатора знайдемо з формули шляху рівномірного руху

$$l_1 = v_0 t.$$

Звідки

$$t = \frac{l_1}{v_0},$$

де l_1 – довжина конденсатора.

7. Вираз для швидкості v_0знайдемо з умови рівності роботи, виконаної полем під час переміщення електрона, і набутої ним кінетичної енергії:

$$\frac{mv_0^2}{2} = eU_0.$$

Звідки

$$v_0^2 = \frac{2eU_0}{m}. \qquad (3.17)$$

8. Підставивши до (3.16) знайдені вирази для a, F, t та v_0^2, одержимо:

$$h_1 = \frac{U_1 l_1^2}{4dU_0}.$$

9. Довжину відрізка h_2 знайдемо з подібності трикутників MDC і векторного

$$h_2 = \frac{v_1 l_2}{v}, \qquad (3.18)$$

де v_1 – швидкість електрона у вертикальному напрямку в точці M; l_2 – відстань від конденсатора до екрана.

10. Швидкість υ_1 знайдемо з формули $\upsilon_1 = at$, яка з урахуванням виразів для a, F та t набуває вигляду:

$$\upsilon_1 = \frac{eU_1 l_1}{dm\upsilon_0}.$$

11. Підставивши вираз для υ_1 до формули (3.18), одержимо

$$h_2 = \frac{eU_1 l_1 l_2}{dm\upsilon_0^2}.$$

Замінивши υ_0^2 за формулою (3.17) знайдемо

$$h_2 = \frac{U_1 l_1 l_2}{2dU_0}.$$

12. Тоді для шуканої відстані $|BC|$ матимемо остаточно

$$|BC| = h_1 + h_2 = \frac{U_1 l_1^2}{4dU_0} + \frac{U_1 l_1 l_2}{2dU_0} = \frac{U_1 l_1}{2dU_0}\left(\frac{l_1}{2} + l_2\right).$$

13. Підставивши числові значення всіх величин, матимемо:

$$|BC| = 5{,}5 \text{ см}.$$

Завдання до теми

1. Кулька масою $m = 40$ мг, яка має позитивний заряд $q = 1$ нКл, рухається зі швидкістю $\upsilon = 10$ см/с. На яку відстань r зможе наблизитись кулька до позитивного точкового заряду $q_0 = 1{,}33$ нКл?

2. До якої відстані r зможуть зблизитися два електрони, якщо вони рухаються назустріч один одному з відносною швидкістю $\upsilon_0 = 10^{6}$ м/с ?

3. Протон (ядро атома водню) рухається зі швидкістю $\upsilon = 7{,}7 \cdot 10^{6}$ м/с. На яку найменшу відстань r може наблизитись протон до ядра атома алюмінію? Заряд ядра атома алюмінію $q = Ze$, де Z – порядковий номер атома в таблиці Мендєлеєва і e – заряд протона, який дорівнює за модулем заряду електрона. Масу протона вважати такою, що дорівнює масі атома водню. Протон і ядро атома вважати точковими зарядами. Впливом електронної оболонки атома алюмінію знехтувати.

4. Під час бомбардування нерухомого ядра натрію α-час-тинкою сила відштовхування між ними досягла значення $F = 140$ Н. На яку найменшу відстань r наблизилась α-частинка до ядра атома натрію? Впливом електронної оболонки атома натрію знехтувати.

5. Дві кульки із зарядами $q_1 = 6{,}66$ нКл та $q_2 = 13{,}33$ нКл знаходяться на відстані $r_1 = 40$ см. Яку роботу A треба здійснити, щоб зблизити їх до відстані $r_2 = 25$ см?

6. Плоский конденсатор можна застосувати як чутливі мікроваги. У плоскому горизонтально розміщеному конденсаторі, відстань між пластинами якого $d = 3{,}84$ мм, знаходиться заряджена мікрочастинка із зарядом $q = 1{,}44 \cdot$ $\cdot\, 10^{-9}\text{СГС}_q$ $\left(1\text{СГС}_q = 3{,}335640951982 \cdot 10^{-10}\ \text{Кл}\right)$. Для того щоб частинка перебувала у рівновазі, між пластинами конденсатора необхідно прикласти різницю потенціалів $U = 40$ В. Знайти масу m частинки.

7. У плоскому горизонтально розміщеному конденсаторі, відстань між пластинами якого $d = 1$ см, знаходиться заряджена крапля масою $m = 5 \cdot$ $\cdot\, 10^{-11}$г. За відсутності електричного поля крапля внаслідок опору повітря падає з певною постійною швидкістю. Якщо до пластин конденсатора прикласти різницю потенціалів $U = 600$ В, то крапелька падатиме вдвічі повільніше. Знайти заряд q краплі.

8. Відстань між пластинами плоского конденсатора $d = 4$ см. Електрон починає рух від негативної пластини у той момент, коли від позитивної пластини починає рухатись протон. На якій відстані від позитивної пластини зустрінуться електрон і протон?

9. Відстань між пластинами плоского конденсатора $d = 1$ см. Від одної з пластин одночасно починають рухатись протон і α-частинка. Яку відстань l пройде α-частинка за той час, протягом якого протон пройде весь шлях від одної пластини до другої?

10. Електрон, пройшовши у плоскому конденсаторі шлях від одної пластини до другої, набуває швидкості $v = 10^6$ м/с. Відстань між пластинами $d = 5{,}3$ мм. Знайти різницю потенціалів U між пластинами, напруженість E

електричного поля всередині конденсатора і поверхневу щільність заряду σ на пластинах.

Контрольні питання

1. Надайте визначення потенціалу електричного поля

2. Як визначити потенціал електричного поля, створений точковим зарядом?

3. Як визначити потенціал електричного поля, створеного металевою сферою?

4. Як визначити енергію взаємодії системи точкових зарядів?

5. Який зв'язок потенціалу з напруженістю електричного поля?

6. Як визначити роботу, що здійснюється електричним полем під час переміщення точкового заряду?

7. Сформулюйте теорему для циркуляції вектора напруженості електростатичного поля.

Література: [1, 3].

Практичне заняття № 4

Тема. Електричний диполь. Властивості діелектриків

Мета: засвоїти основні характеристики діелектриків.

Короткі теоретичні відомості

Диполь є системою, складеною з двох рівних за модулем і протилежних за знаком зарядів. Вектор $\mathbf{l}$, проведений від негативного до позитивного заряду, має назву *плеча диполя*.

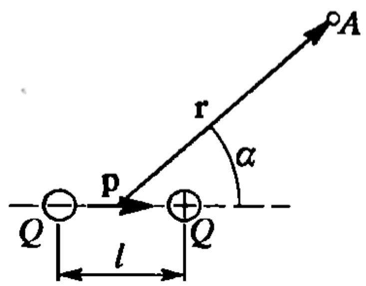

Рисунок 4.1

Електричний момент диполя

$$\mathbf{p} = |Q|\mathbf{l},$$

де $|Q|$ – заряд диполя.

Диполь називають точковим, якщо відстань r від центра диполя до точки, де розглядається його дія, є набагато більшим величини плеча диполя l.

Напруженість поля точкового диполя:

а) на осі диполя

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\mathbf{p}}{\varepsilon r^3}\ ; \qquad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{\varepsilon r^3}\ ;$$

б) на перпендикулярі до осі диполя

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}}{\varepsilon r^3}\ ; \qquad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{\varepsilon r^3}\ ;$$

в) у загальному випадку

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}{r^4}\frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}\right);\ \ E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{p}{r^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta}\,,$$

де θ – кут між радіус-вектором **r** і електричним дипольним моментом **p** (рис. 4.1).

Потенціал поля диполя

$$\varphi = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\cos\alpha.$$

Потенційна енергія диполя в електростатичному полі

$$\Pi = -(\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}) = -pE\cos\alpha.$$

Механічний момент, що діє на диполь з електричним моментом **p**, уміщений в однорідне електричне поле з напруженістю **E**

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}\times\mathbf{E}]; \quad M = pE\sin\alpha,$$

де α – кут між напрямками векторів **p** та **E**.

Сила F_x, що діє на диполь у неоднорідному електростатичному полі, яке має осьову (вздовж осі *Ox*) симетрію:

$$F_x = p\frac{\partial E}{\partial x}\cos\alpha,$$

де α – кут між напрямками векторів **p** та **E**; $\partial E/\partial x$ – величина, що характеризує ступінь неоднорідності електростатичного поля вздовж осі *Ox*.

Поляризованість (вектор поляризації) однорідно поляризованого діелектрика

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{p}_i,$$

де $\mathbf{p}_i$ – електричний дипольний момент окремої (i – ї) молекули; N – кількість молекул, які знаходяться в об’ємі ΔV.

Зв’язок поляризованості з напруженістю E середнього макроскопічного поля в діелектрику

$$P = \chi\varepsilon_0 E = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E,$$

де χ – діелектрична сприйнятливість; ε_0 – електрична стала; ε – діелектрична проникність.

Напруженість E середнього макроскопічного поля в діелектрику зв’язана з напруженістю E_0 зовнішнього поля співвідношеннями:

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon}\ ; \quad E = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0}.$$

Напруженість $E_{\text{лок}}$ локального поля для неполярних рідин і кристалів кубічної сингонії виражається формулами:

$$E_{\text{лок}} = E + \frac{1}{3}\frac{P}{\varepsilon_0}\ ; \quad E_{\text{лок}} = \frac{\varepsilon + 2}{\varepsilon}E = \frac{\varepsilon + 2}{3\varepsilon}E_0.$$

Індукований електричний момент молекули

$$p = \alpha\varepsilon_0 E_{\text{лок}},$$

де α – поляризованості молекули ($\alpha = \alpha_{\text{е}} + \alpha_{\text{а}}$, де $\alpha_{\text{е}}$ – електронна поляризуємість; $\alpha_{\text{а}}$ – атомна поляронаність).

Зв’язок діелектричної сприйнятливості χ з поляризованістю молекули α

$$\frac{\chi}{\chi + 3} = \frac{1}{3}\alpha n,$$

де n – концентрація молекул.

Рівняння Клаузиуса–Мосотті

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{1}{3}\alpha n; \quad \frac{M}{\rho}\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{1}{3}\alpha N_A,$$

де M – молярна маса речовини; ρ – густина речовини.

Формула Лорентца

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{1}{3}\alpha_{\text{е}} n; \quad \frac{M}{\rho}\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{1}{3}\alpha_{\text{е}} N_A,$$

де n – показник заломлення діелектрика; $\alpha_{\text{е}}$ – електронна поляризованість атома або молекули.

Орієнтаційна поляризованість молекули

$$\alpha_{\text{ор}} = \frac{p^2}{3\varepsilon_0 kT},$$

де p – електричний момент молекули (електричний дипольний момент молекули прийнято виражати в одиницях атомного масштабу – дебай: $1\text{дебай}(D) = 3{,}33 \cdot 10^{-30}\text{Кл} \cdot \text{м}$); k – стала Больцмана; T – термодинамічна температура.

Формула Дебая–Ланжевена:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{1}{3}\left(\alpha + \frac{p^2}{3\varepsilon_0 kT}\right)n; \quad \frac{M}{\rho}\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{1}{3}\left(\alpha + \frac{p^2}{3\varepsilon_0 kT}\right)N_A.$$

Приклад 4.1 Диполь з електричним моментом $p = 2\text{нКл} \cdot \text{м}$ знаходиться в однорідному електричному полі напруженістю $E = 30\,\text{кВ/м}$. Вектор **p** складає кут $\alpha_0 = 60°$ з напрямком силових ліній поля. Визначити здійснену зовнішніми силами роботу A обертання диполя на кут $\beta = 30°$.

Розв'язок

З вихідного стану (рис. 4.2, *а*) диполь можна обертати на кут $\beta = 30° = \pi/6$ двома способами: або за годинниковою стрілкою до кута $\alpha_1 = \alpha_0 - \beta = \pi/3 - \pi/6 = \pi/6$ (рис. 4.2, *б*), або проти годинникової стрілки до кута $\alpha_2 = \alpha_0 + \beta = \pi/3 + \pi/6 = \pi/2$ (рис. 4.2, *в*).

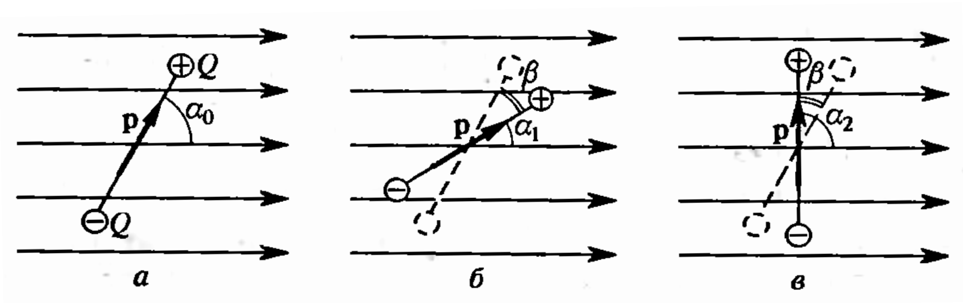

Рисунок 4.2

У першому випадку диполь обертатиметься під дією сил поля. Отже, робота зовнішніх сил буде від'ємною. У другому випадку обертання здійснюватиметься виключно під дією зовнішніх сил, тому робота зовнішніх сил відповідно буде додатною.

Роботу, здійснену під час обертання диполя, можна визначити двома способами: 1) безпосередньо шляхом інтегрування виразу елементарної роботи; 2) за допомогою співвідношення між роботою і зміною потенційної енергії диполя в електричному полі.

1. Розглянемо перший спосіб.

1.1 Елементарна робота з обертанням диполя на кут α

$$dA = Md\alpha = pE\sin\alpha\, d\alpha.$$

1.2 Повна робота з обертанням на кут від α_0 до α

$$A = \int_{\alpha_0}^{\alpha} pE\sin\alpha\, d\alpha = pE\int_{\alpha_0}^{\alpha} \sin\alpha\, d\alpha.$$

1.3 Здійснивши інтегрування, одержимо:

$$A = -pE(\cos\alpha - \cos\alpha_0) = pE(\cos\alpha_0 - \cos\alpha). \tag{4.1}$$

1.4 Робота зовнішніх сил з обертанням диполя за годинниковою стрілкою:

$$A_1 = pE(\cos\alpha_0 - \cos\alpha_1) = 2\cdot 10^{-9}\cdot 30\cdot 10^3\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= -21{,}9\cdot 10^{-6}\text{Дж} = -21{,}9\ \text{мкДж}.$$

1.5 Робота зовнішніх сил з обертанням диполя проти годинникової стрілки:

$$A_2 = pE(\cos\alpha_0 - \cos\alpha_2) = 2\cdot 10^{-9}\cdot 30\cdot 10^3\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 30\cdot 10^{-6}\text{Дж} = 30\ \text{мкДж}.$$

2. Розглянемо другий спосіб.

2.1 Робота A зовнішніх сил пов'язана зі зміною потенційної енергії $\Delta\Pi$ співвідношенням:

$$A = \Delta\Pi = \Pi_2 - \Pi_1,$$

де Π_1 та Π_2 – потенційні енергії відповідно у початковому і кінцевому стані.

2.2 Оскільки потенційна енергія диполя в електричному полі визначається формулою:

$$\Pi = -(\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}) = -pE\cos\alpha,$$

то шукана робота дорівнюватиме:

$$A = \Delta\Pi = \Pi_2 - \Pi_1 = pE(\cos\alpha_0 - \cos\alpha), \tag{4.2}$$

що збігається з формулою (4.1), одержаною першим способом.

Приклад 4.2 Три точкові заряди Q_1, Q_2, Q_3 утворюють електрично нейтральну систему, причому $Q_1 = Q_2 = 10$ нКл. Заряди розміщені у вершинах рівнобічного трикутника. Визначити максимальні значення напруженості E_{max} і потенціалу φ_{max} поля, створеного цією системою зарядів, на відстані $r = 1$ м від центра трикутника, довжина сторони якого дорівнює 10 см.

Розв'язок

1. Нейтральну систему, складену з трьох точкових зарядів, можна зобразити у вигляді диполя. Дійсно, «центр тяжіння» зарядів Q_1та Q_2 лежить на середині відрізка прямої, що з'єднує ці заряди (рис. 4.3). У цій точці можна вважати зосередженим заряд:

$$Q = Q_1 + Q_2 = 2Q_1.$$

2. Оскільки система зарядів є нейтральною $(Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0)$, то

$$Q_3 = -(Q_1 + Q_2) = -Q.$$

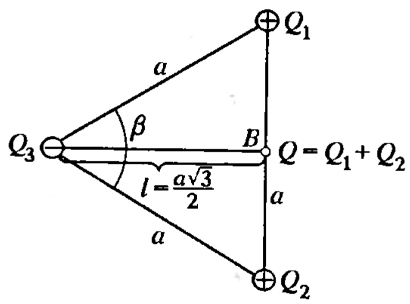

Рисунок 4.3

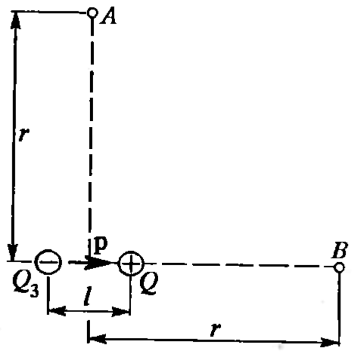

Рисунок 4.4

3. Оскільки відстань l між зарядами Q_3 і Q, що дорівнюють один одному, є набагато меншою за відстань r $(l \ll r)$ (рис. 4.4), то систему цих двох зарядів можна вважати диполем з електричним моментом:

$$\mathbf{p} = |Q|\mathbf{l},$$

де **l** – плече диполя, модуль якого з рис. 4.3 дорівнює:

$$l = a\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4. Оскільки $|Q| = 2Q_1$, то електричний момент такого точкового диполя за модулем становитиме:

$$p = Q_1 a\sqrt{3}.$$

5. Той самий результат можна одержати іншим способом. Систему із трьох зарядів подамо як два диполі з електричними моментами $\mathbf{p}_1$ та $\mathbf{p}_2$ (рис. 4.5), рівними за модулем:

$$p_1 = |\mathbf{p}_1| = Q_1 a; \qquad p_2 = |\mathbf{p}_2| = Q_2 a.$$

6. Електричний момент системи зарядів $\mathbf{p}$ знайдемо як векторну суму $\mathbf{p}_1$ та $\mathbf{p}_2$, тобто

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2.$$

З рис. 4.5 маємо

$$p = 2p_1 \cos\frac{\beta}{2}.$$

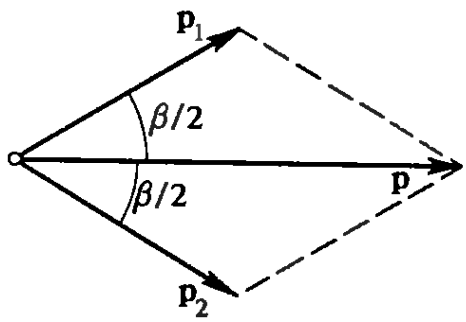

Рисунок 4.5

7. Оскільки

$$p_1 = Q_1 a; \quad \beta = \frac{\pi}{3},$$

то

$$p = 2Q_1 a \cos\frac{\pi}{3} = Q_1 a\sqrt{3},$$

тобто збігається з найденим раніше значенням.

8. Напруженість E і потенціал φ поля диполя виражаються формулами

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{p}{r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\alpha};$$

$$\varphi = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\cos\alpha,$$

де α – кут між векторами $\mathbf{p}$ та $\mathbf{r}$ (див. рис. 4.1).

9. Напруженість і потенціал матимуть максимальні значення при $\alpha = 0$. Отже,

$$E_{max} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{2p}{r^3};$$

$$\varphi_{max} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\,.$$

3. Оскільки $p = Q_1 a\sqrt{3}$ то

$$E_{max} = \frac{2Q_1 a}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{3} = \frac{2\cdot 10\cdot 10^{-9}\cdot 0{,}1}{4\cdot\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 1^3}\cdot\sqrt{3} = 3{,}12\ \frac{\text{В}}{\text{м}}\,.$$

$$\varphi_{max} = \frac{Q_1 a}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sqrt{3} = \frac{10\cdot 10^{-9}\cdot 0{,}1}{4\cdot\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 1^2}\cdot\sqrt{3} = 1{,}56\ \text{В}\,.$$

Приклад 4.3 В атомі йоду, що знаходиться на відстані $r = 1$ нм від $\alpha -$ частинки, індукований електричний момент $p = 1{,}5\cdot 10^{-32}$Кл · м. Визначити поляризованість α атома йоду.

Розв'язок

1. За визначенням поляризованості, вона може бути вираженою за формулою:

$$\alpha = \frac{p}{\varepsilon_0 E_{\text{лок}}}\,, \qquad (4.3)$$

де p – індукований електричний момент атома; $E_{\text{лок}}$ – напруженість локального поля, у якому перебуває даний атом.

2. У нашому випадку таким полем є поле, створене $\alpha -$ частинкою. Напруженість цього поля визначиться виразом:

$$E_{\text{лок}} = E = \frac{2|e|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,. \qquad (4.4)$$

3. Підставляючи (4.4) до (4.3) , знайдемо:

$$\alpha = \frac{2\pi r^2 p}{|e|}\,.$$

4. Підставимо числові значення:

$$\alpha = \frac{2\pi\cdot(1\cdot 10^{-9})^2\cdot 1{,}5\cdot 10^{-32}}{1{,}6\cdot 10^{-19}} = 0{,}59\cdot 10^{-30}\text{м}^3.$$

Приклад 4.4 Криптон перебуває під тиском $p = 10$ МПа при температурі $T = 200$ К. Визначити: 1) діелектричну проникність ε криптону; 2) його поляризованість P, якщо напруженість E_0 зовнішнього електричного поля становить 1 МВ/м. Поляризованість криптону $\alpha = 4{,}5 \cdot 10^{-29}$м^3.

Розв'язок

1. Для визначення діелектричної проникності криптону скористаємось рівнянням Клаузиуса–Мосотті, записаним у вигляді:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{1}{3}\alpha n,$$

де n – концентрація атомів криптону.

2. Виразимо із цієї формули діелектричну проникність:

$$\varepsilon = \frac{1 + \frac{2}{3}\alpha n}{1 - \frac{1}{3}\alpha n}.$$

3. Оскільки концентрація молекул (атомів) позв'язана з тиском і температурою співвідношенням:

$$n = \frac{p}{kT},$$

то матимемо

$$\varepsilon = \frac{3kT + 2\alpha p}{3kT - \alpha p}.$$

4. Підставивши до цієї формули числові значення величин у системі СІ, одержимо:

$$\varepsilon = \frac{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 200 + 2 \cdot 4{,}5 \cdot 10^{-29} \cdot 10^7}{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 200 - 4{,}5 \cdot 10^{-29} \cdot 10^7} = 1{,}17.$$

5. За визначенням поляризованості:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i,$$

де $\mathbf{p}_i$ – електричний дипольний момент окремого (i–го) атому; N – кількість атомів, які знаходяться в об'ємі ΔV.

6. В однорідному електричному полі всі $\mathbf{p}_i$ збігатимуться за модулем і напрямком, тому геометричну суму можна замінити арифметичною. Позначивши $|\mathbf{p}_i| = p$, одержимо:

$$P = \frac{Np}{\Delta V}.$$

7. Відношення кількості атомів N до об'єму ΔV являє собою концентрацію атомів n. Тоді

$$P = np.$$

8. Оскільки електричний дипольний момент атома пропорційний напруженості $E_{\text{лок}}$ локального електричного поля $(p = \alpha\varepsilon_0 E_{\text{лок}})$, то поляризованість

$$P = n\alpha\varepsilon_0 E_{\text{лок}}.$$

9. Виразимо:

а) $E_{\text{лок}}$ через напруженість E_0 зовнішнього поля

$$E_{\text{лок}} = \frac{\varepsilon + 2}{3\varepsilon} E_0;$$

б) n через тиск p і температуру T

$$n = \frac{p}{kT} = \frac{10^7}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 200} = 3{,}6 \cdot 10^{27} \text{м}^{-3}.$$

10. Підставивши до формули поляризованості (пп.8), одержимо:

$$P = \alpha\varepsilon_0 \frac{\varepsilon + 2}{3\varepsilon} n E_0.$$

11. Після підстановки числових значень усіх величин в системі СІ матимемо остаточно:

$$P = 4{,}5 \cdot 10^{-29} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{1{,}17 + 2}{3 \cdot 1{,}17} \cdot 3{,}6 \cdot 10^{27} \cdot 10^7 = 1{,}3 \cdot 10^{-6} \text{Кл/м}^2.$$

Приклад 4.5 Рідкий бензол має густину $\rho = 899\,\text{кг/м}^3$ і показник заломлення $n = 1{,}50$. Визначити: 1) електронну поляризованість $\alpha_\text{е}$ молекул бензолу; 2) діелектричну проникність парів бензолу за нормальних умов.

Розв'язок

1. Для визначення електронної поляризованості застосуємо формулу Лоренц–Лорентца:

$$\frac{M}{\rho}\,\frac{n^2-1}{n^2+2}=\frac{1}{3}\alpha_\text{е}N_A,$$

звідки

$$\alpha_\text{е}=\frac{3M(n^2-1)}{\rho N_A(n^2+2)}\,. \qquad (4.5)$$

2. До одержаного виразу входить молярна маса бензолу M, визначимо її. Оскільки хімічна формула бензолу C_6H_6, то відносна молекулярна маса:

$$M_r=6\cdot 12+6\cdot 1=78.$$

Отже, молярна маса $M=78\cdot 10^{-3}\text{кг/моль}$.

3. Підставимо до (4.5) числові значення величин:

$$\alpha_\text{е}=\frac{3\cdot 78\cdot 10^{-3}(1{,}5^2-1)}{899\cdot 6{,}02\cdot 10^{23}\cdot(1{,}5^2+2)}=1{,}27\cdot 10^{-28}\text{м}^3.$$

4. Діелектричну проникність парів бензолу визначимо з рівняння Клаузиуса–Мосотті

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}=\frac{1}{3}\alpha n, \qquad (4.6)$$

де n – концентрація молекул бензолу.

Зазначимо, що молекули бензолу є неполярними, тому мають лише два типи поляризації: електронну й атомну, причому атомна поляризація є малою і нею можна нехтувати, уважаючи $\alpha\approx\alpha_\text{е}$.

Крім того, за нормальних умов ε мало відрізняється від одиниці, та можна наближено вважати, що $\varepsilon+2\approx 3$.

За таких умов формулу (4.6) можна записати у спрощеному вигляді:

$$\varepsilon-1\approx\alpha_\text{е}n.$$

Звідки маємо:

$$\varepsilon=1+\alpha_\text{е}n.$$

5. За нормальних умов концентрація n молекул є відомою і дорівнює числу Лошмідта $n_\text{л}=2{,}69\cdot 10^{19}\text{см}^{-3}=2{,}69\cdot 10^{25}\text{м}^{-3}$. Підставивши всі числові значення в системі СІ, одержимо остаточно

$$\varepsilon=1+1{,}27\cdot 10^{-28}\cdot 2{,}69\cdot 10^{25}=1{,}00342.$$

Завдання до теми

1. Диполь з електричним моментом $p = 0{,}12$ нКл $\cdot$ м утворюється двома точковими зарядами $Q = \pm 1$нКл. Знайти напруженість E і потенціал φ електричного поля у точці A та B (рис. 4.6), які знаходяться на відстані $r = 8$ см від центра диполя.

2. Визначити напруженість E і потенціал φ поля, створеного диполем у точках A та B (рис. 4.6). Його електричний момент становить $p = 10^{-12}$Кл $\cdot$ м, а відстань r від точок A та B до центра диполя дорівнює 10 см.

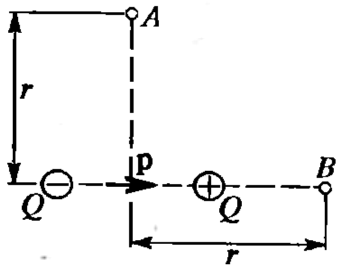

Рисунок 4.6

3. Диполь з електричним моментом $p = 10^{-10}$Кл $\cdot$ м вільно встановлюється в однорідному електричному полі напруженістю $E =$ $= 150$ кВ/ м. Визначити роботу A, необхідну для того, щоб повернути диполь на кут $\alpha = 180°$.

4. Диполь з електричним моментом $p = 10^{-10}$Кл $\cdot$ м вільно встановлюється в однорідному електричному полі напруженістю $E = 10$ кВ/м. Визначити зміну потенційної енергії ΔП диполя у разі обертання його на кут $\alpha = 60°$.

5. Відстань d між пластинами плоского конденсатора дорівнює 2 мм, різниця потенціалів $U = 1{,}8$ кВ. Діелектрик – скло. Визначити діелектричну сприйнятливість χ скла та поверхневу щільність σ' поляризаційних (пов'язаних) зарядів на поверхні скла.

6. Металева куля радіусом $R = 5$ см оточена рівномірно шаром порцеляну завтовшки $d = 2$ см. Визначити поверхневі щільності σ'_1, σ'_2 пов'язаних зарядів відповідно на внутрішній та зовнішній поверхнях діелектриків. Заряд кулі дорівнює 10 нКл.

7. Визначити, за якою напружености E середнього макроскопічного поля в діелектрику ($\varepsilon = 3$) поляризованість P досягне значення 200 мкКл/м^2.

8. Визначити поляризованість P скла, уміщеного у зовнішнє електричне поле напруженістю $E_0 = 5\text{МВ/м}$.

9. Показник заломлення n газоподібного хлору за нормальних умов становить 1,000768. Визначити діелектричну проникність рідкого хлору, щільність якого дорівнює $\rho = 1{,}56 \cdot 10^3 \text{кг/м}^3$.

10. Визначити показник заломлення n_1 рідкого кисню, якщо показник заломлення n_2 газоподібного кисню за нормальних умов дорівнює 1,000272. Щільність рідкого кисню $\rho = 1{,}19 \cdot 10^3 \text{кг/м}^3$.

Контрольні питання

1. Що є електричним моментом диполя?
2. Як визначити напруженість поля точкового диполя?
3. Як визначити потенціал поля диполя?
4. Як визначити потенційну енергію диполю в електростатичному полі?
5. Як визначити механічний момент, що діє на диполь?
6. Що є поляризованістю (вектор поляризації) однорідно поляризованого діелектрика?
7. Як пов'язані між собою напруженість E середнього макроскопічного поля в діелектрику з напруженістю E_0 зовнішнього поля?
8. Як визначтити індукований електричний момент молекули?
9. Наведіть зв'язок діелектричної сприйнятливості χ з поляризованістю молекули.

Література: [1, 3].

Практичне заняття № 5

Тема. Електрична ємність. Конденсатори

Мета: засвоїти способи розрахунку елекричної ємності.

Короткі теоретичні відомості

Електрична ємність уособленого провідника:

$$C = \frac{Q}{\varphi},$$

де Q – заряд, наданий провіднику; φ – потенціал провідника.

Електроємність конденсатора:

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2},$$

де $\varphi_1 - \varphi_2$ – різниця потенціалів на обкладинках конденсатора.

Електрична ємність усобленої провідної сфери радіусом R, яка знаходиться у нескінченному середовищі з діелектричною проникністю ε:

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R.$$

Якщо сфера є порожнистою і заповненою діелектриком, то її електроємність від цього не змінюється.

Електрична ємність плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d},$$

де S – площа пластин (кожної пластини); d – відстань між ними; ε – діелектрична проникність діелектрика, що заповнює простір між пластинами.

Електрична ємність плоского конденсатора, заповненого n шарами діелектрика завтовшки d_i кожний з діелектричною проникністю ε_i (шаруватий конденсатор):

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} + \cdots + \frac{d_n}{\varepsilon_n}}.$$

Електрична ємність сферичного конденсатора (дві концентричні сфери радіусами R_1та R_2, простір між якими заповнено діелектриком з діелектричною проникністю ε):

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Електрична ємність циліндричного конденсатора (два коаксіальні циліндри завдовжки l і радіусами R_1та R_2, простір між якими заповнено діелектриком з діелектричною проникністю ε):

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln\frac{R_2}{R_1}}.$$

Електрична ємність C батареї послідовно з’єднаних конденсаторів:

а) у загальному випадку:

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i},$$

де n – кількість конденсаторів;

б) для двох конденсаторів

$$C = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2};$$

в) для n однакових конденсаторів ємністю C_1 кожний

$$C = \frac{C_1}{n}.$$

Електрична ємність батареї паралельно з’єднаних конденсаторів

а) у загальному випадку

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i,$$

де n – кількість конденсаторів;

б) для двох конденсаторів

$$C = C_1 + C_2;$$

в) для n однакових конденсаторів ємністю C_1 кожний

$$C = nC_1.$$

Приклад 5.1 Визначити електричну ємність C плоского конденсатора з двома шарами діелектрика: порцеляну завтовшки $d_1 = 2$ мм та ебоніту завтовшки $d_2 = 1{,}5$ мм, якщо площа S пластин дорівнює 100 см^2.

Розв’язок

1. Ємність конденсатора, за визначенням,

$$C = \frac{Q}{U},$$

де Q – заряд на пластинах конденсатора; U – різниця потенціалів пластин.

2. Замінюючи у цій рівності загальну різницю потенціалів на суму напруг у кожному шарі діелектрика, одержимо:

$$C = \frac{Q}{U_1 + U_2}\,. \tag{5.1}$$

3. Оскільки

$$Q = \sigma S;$$

$$U_1 = E_1 d_1 = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} d_1;$$

$$U_2 = E_2 d_2 = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_2} d_2,$$

то рівність (5.1) можна записати у вигляді:

$$C = \frac{\sigma S}{\frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} d_1 + \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_2} d_2}\,, \tag{5.2}$$

де σ – поверхнева щільність заряду на пластинах; E_1 та E_2 – напруженості поля у першому та другому шарах діелектрика відповідно; D – електричне зміщення поля в діелектрику.

4. Помножуючи чисельник і знаменник (5.2) на ε_0 і враховуючи, що $D = \sigma$, одержимо остаточно:

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}}\,.$$

5. Підставивши числові значення величин у системі СІ, матимемо:

$$C = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 100 \cdot 10^{-4}}{\frac{2 \cdot 10^{-3}}{5} + \frac{1{,}5 \cdot 10^{-3}}{3}} = 9{,}83 \cdot 10^{-11}\text{Ф} = 98{,}3\ \text{пФ}.$$

Приклад 5.2 Два плоскі конденсатори однакової електроємності $C_1 = C_2 = C$ з'єднані в батарею послідовно і підключені до джерела струму з електрорушійною силою $\mathcal{E}$. Як зміниться різниця потенціалів U_1 на пластинах першого конденсатора, якщо простір між пластинами другого конденсатора, не відключаючи джерела струму, заповнити діелектриком з діелектричною проникністю $\varepsilon = 7$?

Розв'язок

1. До заповнення другого конденсатора діелектриком, різниця потенціалів на пластинах обох конденсаторів була однаковою:

$$U_1 = U_2 = \frac{\mathcal{E}}{2}.$$

2. Після заповнення електроємність другого конденсатора зросла у ε разів

$$C_2' = \varepsilon C_2 = \varepsilon C.$$

Електроємність першого не змінювалась, тобто

$$C_1' = C.$$

3. Оскільки джерело струму не вимикалося, то загальна різниця потенціалів на батареї конденсаторів залишилася попередньою, але відбувся її перерозподіл між конденсаторами.

На першому конденсаторі:

$$U_1' = \frac{Q}{C_1'} = \frac{Q}{C}, \tag{5.3}$$

де Q – заряд на пластинах конденсатора.

4. Під час послідовного з'єднання конденсаторів заряд на кожній пластині та на всій батареї будуть однаковими, тобто:

$$Q = C_{\text{бат}}' \mathcal{E},$$

де

$$C_{\text{бат}}' = \frac{C_1' C_2'}{C_1' + C_2'} = \frac{C \cdot \varepsilon C}{C + \varepsilon C} = \frac{\varepsilon C}{1 + \varepsilon}.$$

Тобто

$$Q = \frac{\varepsilon C}{1 + \varepsilon} \mathcal{E}.$$

5. Підставляючи знайдене значення до (5.3), знаходимо:

$$U_1' = \frac{Q}{C} = \frac{\varepsilon C}{(1 + \varepsilon)} \frac{\mathcal{E}}{C} = \frac{\varepsilon \mathcal{E}}{1 + \varepsilon}.$$

6. Щоб визначити, як змінилась різниця потенціалів на пластинах першого конденсатора, обчислимо співвідношення:

$$\frac{U_1'}{U_1} = \frac{\varepsilon\mathcal{E} \cdot 2}{(1+\varepsilon)\mathcal{E}} = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Підставивши числові значення, знаходимо:

$$\frac{U_1'}{U_1} = \frac{2 \cdot 7}{1+7} = 1{,}75.$$

Отже, різниця потенціалів на пластинах першого конденсатора після заповнення другого діелектриком зросла в 1,75 раза.

Завдання до теми

1. Площа пластин плоского повітряного конденсатора $S = 1\ \text{м}^2$, відстань між ними $d = 1{,}5\ \text{мм}$. Конденсатор заряджений до різниці потенціалів $U = 300\ \text{В}$. Визначити поверхневу щільність заряду σ на його пластинах.

2. Необхідно виготовити конденсатор ємністю $C = 250\ \text{пФ}$. Для цього на парафінований папір завтовшки $d = 0{,}05\ \text{мм}$ з обох боків наклеюють диски станіолю. Яким має бути діаметр D дисків станіолю?

3. Коаксіальний електричний кабель складається із центральної жили і концентричної циліндричної оболонки, між якими знаходиться діелектрик ($\varepsilon = 3{,}2$). Знайти ємність C_l одиниці довжини такого кабелю, якщо радіус жили $r = 1{,}3\ \text{см}$, радіус оболонки $R = 3{,}0\ \text{см}$.

4. Радіус центральної жили коаксіального кабелю $r = 1{,}5\ \text{см}$, радіус оболонки $R = 3{,}5\ \text{см}$. Між центральною жилою та оболонкою прикладена різниця потенціалів $U = 2{,}3\ \text{кВ}$. Знайти напруженість E електричного поля на відстані $x = 2\ \text{см}$ від осі кабелю.

5. Радіус внутрішньої кулі повітряного сферичного конденсатора $r = 1\ \text{см}$, радіус зовнішньої кулі $R = 4\ \text{см}$. Між кулями прикладена різниця потенціалів $U = 3\ \text{кВ}$. Знайти напруженість електричного поля на відстані $x = 3\ \text{см}$ від центра куль.

6. Радіус внутрішньої кулі повітряного сферичного конденсатора $r = 1\ \text{см}$, радіус зовнішньої кулі $R = 4\ \text{см}$. Між кулями прикладена різниця потенціалів $U = 3\ \text{кВ}$. Яку швидкість v набуде електрон, наблизившись до центра куль з відстані $x_1 = 3\ \text{см}$ до відстані $x_2 = 2\ \text{см}$?

7. Знайти ємність C системи конденсаторів, зображеної на рис. 5.1. Ємність кожного конденсатора $C_i = 0{,}5$ мкФ.

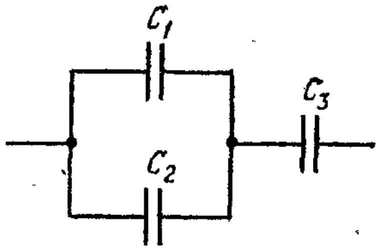

Рисунок 5.1

8. У яких межах може змінюватись ємність C системи, складеної з двох конденсаторів, якщо ємність одного з конденсаторів є сталою і дорівнює $C_1 = 3{,}33$ нФ, а ємність C_2 другого змінюється в межах від 22,2 до 555,5 пФ?

9. Площа пластин плоского конденсатора $S = 0{,}01\ \text{м}^2$, відстань між ними $d = 1$см. До пластин прикладена різниця потенціалів $U = 300$ В. У просторі між пластинами перебувають плоско паралельна пластинка скла завтовшки $d_1 = 0{,}5$ см і плоско паралельна пластина парафіну завтовшки $d_2 = 0{,}5$ см. Знайти напруженості E_1 та E_2 електричного поля і спади потенціалу U_1 та U_2 у кожному шарі. Якими будуть за цих умов ємність C конденсатора і поверхнева щільність заряду σ на його пластинах?

10. Між пластинами плоского конденсатора, що знаходяться на відстані $d = 1$ см одна від одної, прикладена різниця потенціалів $U = 100$ В. До одної з пластин прилягає плоско паралельна пластинка кристалічного бромистого талію ($\varepsilon = 173$) завтовшки $d_0 = 9{,}5$ мм. Після відключення конденсатора від джерела напруги пластинку кристалу виймають. Якою буде після цього різниця потенціалів U між пластинами конденсатора?

Контрольні питання

1. Визначте ємність плоского конденсатора.
2. Визначте ємність сферичного конденсатора.
3. Визначте ємність циліндричного конденсатора.
4. Охарактеризуйте конденсатор як елемент електричного кола. Які існують з’єднання конденсаторів?

Література: [1, 3].

Практичне заняття № 6

Тема. Енергія зарядженого провідника

Мета: засвоїти основні характеристики заряджених тіл.

Короткі теоретичні відомості

Енергія зарядженого провідника визначається через заряд Q, потенціал φ та електричну ємність C провідника такими співвідношеннями:

$$W = \frac{1}{2}C\varphi^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}Q\varphi.$$

Енергія зарядженого конденсатора

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QU,$$

де C – електрична ємність конденсатора; U – різниця потенціалів на його пластинах.

Об'ємна щільність енергії (енергія електричного поля, що припадає на одиницю об'єму)

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}ED,$$

де E – напруженість електричного поля в середовищі з діелектричною проникністю ε; U – електричне зміщення.

Приклад 6.1 Конденсатор електроємністю $C_1 = 3$ мкФ був заряджений до різниці потенціалів $U_1 = 40$ В. Після відключення від джерела струму конденсатор був з'єднаний паралельно з іншим незарядженим конденсатором електроємністю $C_2 = 5$ мкФ. Визначити енергію ΔW, витрачену на утворення іскри в момент приєднання другого конденсатора.

Розв'язок

1. Енергія, що була витрачена на утворення іскри, дорівнює

$$\Delta W = W_1 - W_2, \tag{6.1}$$

де W_1 – енергія, яку мав перший конденсатор до приєднання до нього другого конденсаторау; W_2 – енергія, яку матиме батарея, складена з двох конденсаторів.

2. Визначимо ці енергії

$$W_1 = \frac{C_1 U_1^2}{2};$$

$$W_2 = \frac{C_{\text{бат}} U_2^2}{2},$$

де U_2 – різниця потенціалів на затискачах батареї конденсаторів.

3. Ємність батареї двох паралельно з'єднаних конденсаторів:

$$C_{\text{бат}} = C_1 + C_2.$$

4. Підставивши одержані значення до (6.1), матимемо

$$\Delta W = \frac{C_1 U_1^2}{2} - \frac{(C_1 + C_2) U_2^2}{2}. \tag{6.2}$$

5. Ураховуючи, що після приєднання другого конденсатора заряд залишився попереднім, виразимо різницю потенціалів U_2 таким чином:

$$U_2 = \frac{Q}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 U_1}{C_1 + C_2}.$$

6. Підставляючи одержане значення U_2 до формули (6.2), матимемо:

$$\Delta W = \frac{C_1 U_1^2}{2} - \frac{(C_1 + C_2) C_1^2 U_1^2}{2(C_1 + C_2)^2} = \frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U_1^2.$$

7. Після підстановки чиселових значень величин у системі СІ одержимо

$$\Delta W = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 10^{-12}}{(3 + 5) \cdot 10^{-6}} \cdot 40^2 = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\text{Дж} = 1{,}5\ \text{мДж}.$$

Приклад 6.2 Плоский повітряний конденсатор з площею S пластини, що дорівнює 500 см^2, підключений до джерела струму, ЕРС $\mathcal{E}$ якого дорівнює 300 В. Визначити роботу A зовнішніх сил щодо розсування пластин від відстані $d_1 = 1$ см до $d_2 = 3$ см у двох випадках: 1) пластини перед розсуванням відключаються від джерела струму; 2) пластини в процесі розсування залишаються підключеними до джерела.

Розв'язок

1. Розглянемо *перший випадок*. Систему двох заряджених і відключених від джерела струму пластин можна розглядати як ізольовану систему, відносно якої діятиме закон збереження енергії. За таких умов робота зовнішніх сил дорівнюватиме зміні енергії системи:

$$A = \Delta W = W_2 - W_1, \tag{6.3}$$

де W_2 – енергія поля конденсатора у кінцевому стані (пластини перебувають на відстані d_2); W_1 – енергія поля конденсатора у початковому стані (пластини перебувають на відстані d_1).

1.1 Енергію в цьому випадку зручно виразити через заряд Q на пластинах, оскільки заряд пластин, відключених від джерела у разі їх розсування, не змінюватиметься. Тобто,

$$W_1 = \frac{Q^2}{2C_1}; \quad W_2 = \frac{Q^2}{2C_2}.$$

1.2 Підставляючи одержані значення до (6.3), матимемо:

$$A = \frac{Q^2}{2C_2} - \frac{Q^2}{2C_1} = \frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1}\right).$$

1.3 Виразимо в цій формулі заряд через ЕРС $\mathcal{E}$ джерела струму і початкову електроємність C_1

$$Q = C_1 \mathcal{E}.$$

Тоді

$$A = \frac{C_1^2 \mathcal{E}^2}{2}\left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1}\right). \tag{6.4}$$

1.4 Визначимо ємності плоского конденсатора на початку та в кінці руху пластин:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1}; \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_2}.$$

1.5 Підставивши ці значення до (6.4), одержимо:

$$A = \frac{\varepsilon_0^2 S^2 \mathcal{E}^2}{2 d_1 d_2}\left(\frac{d_2}{\varepsilon_0 S} - \frac{d_1}{\varepsilon_0 S}\right).$$

Після скорочення на $\varepsilon_0 S$ формула набуває вигляду:

$$A = \frac{\varepsilon_0 S \mathcal{E}^2}{2d_1 d_2}(d_2 - d_1). \qquad (6.5)$$

1.6 Підставляючи числові значення величин у системі СІ, матимемо остаточно

$$A = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 500 \cdot 10^{-4} \cdot 300^2}{2 \cdot 1 \cdot 10^{-2} \cdot 3 \cdot 10^{-2}} \cdot (3 - 1) \cdot 10^{-2} =$$

$$= 1{,}33 \cdot 10^{-6}\text{Дж} = 1{,}33\ \text{мкДж}.$$

2. Розглянемо *випадок 2*. Пластини залишаються підключеними до джерела струму і система двох пластин уже не є ізольованою (заряд з пластин у разі їх розсування переміщуватиметься до клем батареї). Тому застосовувати закон збереження енергії не можна.

Зазначимо, що у разі розсування пластин конденсатора: а) різниця їх потенціалів лишається незмінною ($U = \mathcal{E}$); б) ємність буде зменшуватись ($C = \varepsilon_0 S/d$). Також будуть зменшуватись заряд на пластинах ($Q = CU$) і напруженість електричного поля ($E = U/d$). Оскільки величини E та Q, що є необхідними для визначення роботи, будуть змінними, то роботу слід визначати шляхом інтегрування.

2.1 Запишемо вираз для елементарної роботи:

$$dA = QE_1 dx, \qquad (6.6)$$

де E_1 – напруженість поля, створеного зарядом одної пластини.

2.2 Виразимо напруженість поля E_1 і заряд Q через відстань між пластинами:

$$E_1 = \frac{1}{2}E = \frac{\mathcal{E}}{2x};$$

$$Q = C\mathcal{E} = \frac{\varepsilon_0 S}{x}\mathcal{E}.$$

2.3 Підставивши ці значення до (6.6), одержимо:

$$dA = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{S^2 \mathcal{E}^2}{x^2} dx.$$

2.4 Після інтегрування в межах від d_1 до d_2, знайдемо вираз шуканої роботи

$$A = \frac{1}{2}\varepsilon_0 S\mathcal{E}\int_{d_1}^{d_2}\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 S\mathcal{E}^2\left|-\frac{1}{x}\right|_{d_1}^{d_2} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 S\mathcal{E}^2\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right).$$

Після спрощення ця формула набуває вигляду:

$$A = \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{S\mathcal{E}^2}{d_1 d_2}(d_2 - d_1).$$

2.5 Перевіримо розмірність одержаної величини

$$[A] = \frac{[\varepsilon_0][S][\mathcal{E}^2][d]}{[d][d]} = \frac{1\frac{\text{Ф}}{\text{м}}\cdot 1\text{м}^2\cdot 1\text{В}^2\cdot 1\text{м}}{1\text{м}\cdot 1\text{м}} = \frac{1\text{Кл}\cdot 1\text{В}^2}{1\text{В}} = 1\text{Дж}.$$

Підставивши числові значення величин у системі СІ, одержимо остаточно

$$A = \frac{1}{2}\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot\frac{500\cdot 10^{-4}\cdot 300^2}{1\cdot 10^{-2}\cdot 3\cdot 10^{-2}}\cdot(3-1)\cdot 10^{-2} = 1{,}33\cdot 10^{-6}\text{Дж}.$$

Приклад 6.3 Плоский конденсатор заряджений до різниці потенціалів $U = 1$ кВ. Відстань d між пластинами дорівнює 1 см. Діелектрик – скло ($\varepsilon = 7$). Визначити об’ємну щільність енергії поля конденсатора.

Розв’язок

1. Об’ємна щільність енергії поля конденсатора:

$$w = \frac{W}{V}, \tag{6.7}$$

де W – енергія поля конденсатора; V – об’єм, який займає поле, тобто об’єм простору між пластинами конденсатора.

2. Енергія поля конденсатора визначається формулою:

$$W = \frac{CU^2}{2}, \tag{6.8}$$

де U – різниця потенціалів, до якої заряджені пластини конденсатора; C – його електроємність.

3. Оскільки

$$C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}; \quad V = Sd,$$

То підставляючи ці значення до (6.8), а потім до (6.7), одержимо:

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon U^2}{2d^2}.$$

4. Підставивши числові значення величин у системі СІ, матимемо:

$$w = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 7 \cdot (1 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot (1 \cdot 10^{-2})^2} = 0{,}309\ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}.$$

Приклад 6.4 Металева куля радіусом $R = 3$ см несе заряд $Q = 20$ нКл. Куля оточена шаром парафіну ($\varepsilon = 2$) завтовшки $d = 2$ см. Визначити енергію W електричного поля, що розміщується у шарі діелектрика.

Розв'язок

1. Оскільки поле, створене зарядженою кулею, є неоднорідним, то енергія поля в шарі діелектрика розподілена нерівномірно. Однак об'ємна щільність енергії буде однаковою у всіх точках, що віддалені від центра сфери на однакову відстань, оскільки поле зарядженої кулі має сферичну симетрію.

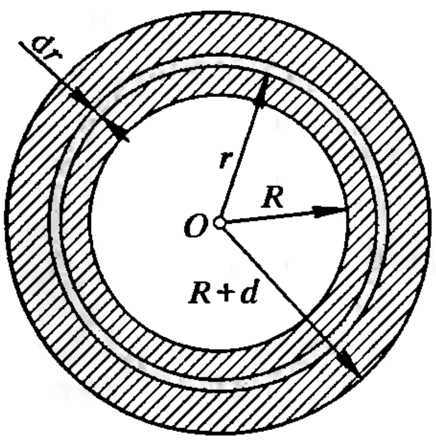

Рисунок 6.1

2. Виразимо енергію в елементарному сферичному шарі діелектрика об'ємом dV:

$$dW = wdV,$$

де w – об'ємна щільність енергії (рис. 6.1).

3. Повна енергія визначиться інтегралом:

$$W = \int wdV = 4\pi \int_R^{R+d} wr^2 dr\,, \tag{6.9}$$

де r – радіус елементарного сферичного шару; dr – його товщина.

4. Об'ємна щільність енергії визначається формулою:

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon E^2,$$

де E – напруженість поля.

5. У нашому випадку

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^4}.$$

Отже,

$$w = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon r^4}.$$

6. Підставимо це значення до (6.9). Після винесення сталих величин за знак інтеграла, матимемо:

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_R^{R+d}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d}\right) = \frac{Q^2 d}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon R(R+d)}.$$

7. Підставивши числові значення величин у системі СІ, матимемо:

$$W = \frac{(20\cdot 10^{-9})^2\cdot 2\cdot 10^{-2}}{8\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 2\cdot 3\cdot 10^{-2}\cdot(3+2)\cdot 10^{-2}} = 12\cdot 10^{-6}\text{Дж} = 12\ \text{мкДж}.$$

Приклад 6.5 Визначити власну потенційну енергію П електростатичного поля, яку має куля радіусом $R = 3$ см, що несе рівномірно розподілений за об'ємом заряд $Q = 5$ нКл.

Розв'язок

1. Власна потенційна енергія поля рівномірно зарядженої за об'ємом кулі дорівнює роботі A зовнішніх сил, яку необхідно здійснити, «складаючи» кулю з диференційно малих порцій заряду dq, переносячи їх з нескінченності.

2. Нехай куля вже має певний заряд q і радіус r. Потенціал поверхні такої кулі:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

3. Для приєднання заряду dq необхідно здійснити роботу:

$$dA_{\text{зовн.сил}} = \varphi dq.$$

4. Зазначена робота дорівнюватиме зрощенню власної потенційної енергії:

$$d\Pi = dA_{\text{зовн.сил}} = \varphi dq = \frac{q\,dq}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

5. Уважатимемо, що заряд dq є рівномірно розподіленим за поверхнею кулі радіусом r. Тоді

$$dq = \rho dV = \rho S dr = 4\pi r^2 \rho dr,$$

де ρ – об’ємна щільність заряду; dV – об’єм сферичного шару.

6. За таких умов

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_0} r^2.$$

Тоді

$$d\Pi = \varphi dq = \frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_0} r^2 \cdot 4\pi r^2 \rho dr = \frac{4\pi}{3}\frac{\rho^2}{\varepsilon_0} r^4 dr.$$

7. Проінтегруємо цей вираз у межах від 0 до R

$$\Pi = \int_0^{\mathrm{R}} d\Pi(r) = \frac{4\pi}{3}\frac{\rho^2}{\varepsilon_0}\frac{R^5}{5}.$$

8. Оскільки

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\text{ ,то } \rho^2 = \frac{Q^2}{\left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 R^6}.$$

Тоді

$$\Pi = \frac{4\pi}{3}\frac{Q^2 R^5}{\left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 R^6 5\varepsilon_0} = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

9. Підставивши числові значення величин у системі СІ, одержимо:

$$\Pi = \frac{3}{5}\cdot\frac{(5\cdot 10^{-9})^2}{3\cdot 10^{-2}}\cdot 9\cdot 10^9 = 4{,}5\cdot 10^{-6}\text{Дж} = 4{,}5\text{ мкДж}.$$

Завдання до теми

1. Куля має потенціал $\varphi = 4{,}5$ кВ і поверхневу щільність заряду $\sigma = 11{,}3$ мкКл/м^2. Знайти радіус R, заряд q, ємність C та енергію W кулі.

2. Куля, занурена у гас, має потенціал $\varphi = 4{,}5$ кВ і поверхневу щільність заряду $\sigma = 11{,}3$ мкКл/м^2. Знайти радіус W, заряд q, ємність C та енергію W кулі.

3. Дві металеві кульки, перша із зарядом $q_1 = 10$ нКл і радіусом $R_1 = 3$ см та друга з потенціалом $\varphi_2 = 9$ кВ і радіусом $R_2 = 2$ см, з’єднуються

провідником, ємністю якого можна нехтувати. Знайти: а) потенціал φ_1 першої кульки до розряду; б) заряд q_2 другої кульки до розряду; в) енергії W_1 та W_2 кожної кульки до розряду: г) заряд q_1' та потенціал φ_1' першої кульки після розряду; д) заряд q_2' та потенціал φ_2' другої кульки після розряду; е) енергію W з'єднаних провідником кульок;   ж) роботу A розряду.

4. Заряджена куля 1 радіусом $R_1 = 2$ см приводиться у дотик з незарядженою кулею 2, радіус якої $R_2 = 3$ см. Після роз'єднання куль енергія кулі 2 дорівнювала $W_2 = 0{,}4$ Дж. Який заряд q_1 був на кулі 1 до торкання з кулею 2?

5. Пластини плоского конденсатора площею $S = 0{,}01$ м^2 кожна притягуються одна до одної із силою $F = 30$ мН. Простір між пластинами заповнено слюдою. Знайти об'ємну щільність енергії w_0 поля.

6. Між пластинами плоского конденсатора вкладено тонку слюдяну пластинку. Який тиск здійснюватиметься на цю пластинку за напруженості електричного поля $E = 1$ МВ/м?

7. Кожна пластина плоского конденсатора має площу $S = 0{,}01$ м^2, відстань між ними $d_1 = 1$мм. До пластин конденсатора прикладена різниця потенціалів $U = 0{,}1$ кВ. Пластини розсувають до відстані $d_2 = 25$ мм. Знайти енергії W_1 і W_2конденсатора до та після розсунення пластин, якщо джерело напруги перед розсуненням не відключається.

8. Кожна пластина плоского конденсатора має площу $S = 0{,}01$ м^2, відстань між ними $d_1 = 1$мм. До пластин конденсатора прикладена різниця потенціалів $U = 0{,}1$ кВ. Пластини розсувають до відстані $d_2 = 25$ мм. Знайти енергії W_1 і W_2 конденсатора до та після розсунення пластин, якщо джерело напруги перед розсуненням відключається.

9. Знайти об'ємну щільність енергії електричного поля в точці, яка перебуває на відстані $x = 2$ см від поверхні зарядженої кулі радіусом $R = 1$ см. Поверхнева щільність заряду на кулі $\sigma = 16{,}7$ мкКл/м^2. Діелектрична проникність середовища $\varepsilon = 2$.

10. Знайти об’ємну щільність енергії електричного поля в точці, яка перебуває на відстані $x = 2$ см від нескінченно довгої зарядженої нитки. Лінійна щільність заряду на нитці $\tau = 167$ нКл/м. Діелектрична проникність середовища $\varepsilon = 2$.

Контрольні питання

1. Як визначити енергію і щільність енергії електричного поля?
2. Як визначити енергію зарядженого провідника?
3. Як визначити об’ємну щільність енергії?
4. Як визначається енергія зарядженого конденсатора?

Література: [1, 3].

2 КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ЗНАНЬ СТУДЕНТІВ

Критерії оцінювання знань студентів з навчальної дисципліни «Фізика», формою семестрового контролю якої є екзамен (1-й семестр).

Таблиця 4.1 – Розподіл балів за видами занять

Вид занять, складові контролю	Кількість занять	Максим. бал
Поточний контроль		
Лекційні заняття: відвідування, наявність конспекту та активність	20	10
Практичні заняття: відвідування, активність, опитування, виконання індивідуальних завдань, перевірка самостійної роботи	10	15
Лабораторні роботи: підготовка, опрацювання результатів та оформлення звіту, захист	10	15
Розрахунково-графічне завдання	–	10
Тест за модулем 1	–	10
Тест за модулем 2	–	10
Тест за модулем 3	–	10
Підсумковий контроль		
Підсумковий тест (екзамен)		20
Підсумок		100

Студенту надається можливість не складати екзамен, якщо за результатами поточного контролю він отримав не менше 60 балів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Базова

1. Андріяшик М.В., Вербицький Б.І., Король А.М. Курс фізики. Київ: Фламенко, 2008. 530 с.

2. Гаркуша І.П., Горбачук І.Т., Курінний В.П. Загальний курс фізики. Збірник задач К.: Техніка, 2008. 560 с.

3. Дмитріева В. Ф. Фізика: Навч. посіб, Київ: Техніка, 2008. 648 с.

4. Кармазін В.В., Семенець В.В Курс загальної фізики. Навчальний посібник для вищих навчальних закладів. Київ: Кондор, 2016. 786 с.

5. Кучерук І. М., Горбачук І. Т., Луцик П. П. Загальний курс фізики. Том 2: Електрика і магнетизм. Київ: Техніка, 2001. 452 с.

6. Палєхін В.П. Курс фізики. Харків: Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна, 2013. 516 с.

Додаткова

1. Yurko A., Kuharenko D. Simulation of work of the photodiode in the simulator ELECTRONICS WORKBENCH II Міжнародний форум «IT Тренди: великі дані, штучний інтелект, соціальні медіа»: Тези доповідей, 20–21 листопада 2015 р. Кременчук: Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, 2015 . С. 9–10.

2. Бушок Г. Ф., Левандовський В. В., Півень Г. Ф. Курс фізики : навчальний посібник, Книга 1. Фізичні основи механіки. Електрика і магнетизм. Київ. Либідь 2001. 448 с.

3. Стахів П.Г., Коруд В.І., Гамола О.Є. Основи електроніки: функціональні елементи та їх застосування. Львів : Магнолія, 2015. 206 с.

4. Юрко О. О. Перекрест А. Л., Мосьпан Д. В., Кухаренко Д. В., Вадурін К. О. Комп’ютеризований практикум з моделювання фізичних процесів. Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. Кременчук : КрНУ, 2022. Випуск 6 (137).

Інформаційні ресурси

1. https://www.youtube.com/channel/UCWfhBu4fAt126ZbxREz3IBw

2. https://home.web.cern.ch/science/experiments/atlas

3. https://phet.colorado.edu/uk/simulations/filter?subjects=physics&type=html,prototype

Методичні вказівки щодо практичних занять з навчальної дисципліни «Фізика» для студентів денної форми навчання зі спеціальності 171 – «Електроніка» освітньо-професійної програми «Технологія, обладнання та виробництво електронної техніки» освітнього ступеня «Бакалавр»

Укладачі: к. т. н., доц. В. О. Мосьпан
к. т. н., доц. О. О. Юрко

Відповідальний за випуск зав. кафедри КІЕ А. Л. Перекрест

Підп. до др. ______________. Формат 60×84 1/16. Папір тип. Друк ризографія.
Ум. друк. арк. _____. Наклад ______ прим. Зам. № ___________. Безкоштовно.

Редакційно-видавничий відділ
Кременчуцького національного університету
імені Михайла Остроградського
вул. Першотравнева 20, м. Кременчук, Полтавська обл., 39600