МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ ЕЛЕКТРИЧНОЇ ІНЖЕНЕРІЇ
ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ЩОДО ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНИХ РОБІТ
З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
«ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА»

ДЛЯ ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ
ПЕРШОГО (БАКАЛАВРСЬКОГО) РІВНЯ ДЕННОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ
ЗІ СПЕЦІАЛЬНОСТІ 123 – «КОМП'ЮТЕРНА ІНЖЕНЕРІЯ»
ОСВІТНЬО-ПРОФЕСІЙНОЇ ПРОГРАМИ «КОМП'ЮТЕРНА ІНЖЕНЕРІЯ»
(ЧАСТИНА 1)

КРЕМЕНЧУК 2024

Методичні вказівки щодо виконання практичних робіт з навчальної дисципліни «Дискретна математика» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня денної форми навчання зі спеціальності 123 – «Комп'ютерна інженерія» освітньо-професійної програми «Комп'ютерна інженерія» (частина 1)

Укладач д. т. н., проф. І. Г. Оксанич

Рецензент д. т. н., проф. І. В. Шевченко

Кафедра автоматизації та інформаційних систем

Затверджено методичною радою Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського

Протокол № 1 від 10.09 2024 року

Голова методичної ради _____ проф. Віктор КОСТІН

ЗМІСТ

Вступ……4

1 Перелік практичних робіт……7

Практична робота № 1 Поняття множини, основні операції з множинами, діаграми Ейлера–Венна.……..7

Практична робота № 2 Властивості операцій з множинами…….....14

Практична робота № 3 Поняття впорядкованої множини, прямий добуток множин. Системи рівнянь, що задані множинами……21

Практична робота № 4 Поняття відношення, способи задання відношень. Композиція відношень…….....…….....27

Практична робота № 5 Властивості відношень. Функціональні відношення. Відношення порядку……...……..……31

2 Критерії оцінювання знань здобувачів……..……...39

Список літератури……42

ВСТУП

Для дослідження й аналізу складних систем і процесів, які в них відбуваються, часто використовують дискретні методи формалізованого подання об’єктів, що є предметом вивчення дискретної математики. До них належать методи, що ґрунтуються на теоретико-множинних зображеннях, графах, формальних системах, математичній логіці та ін.

Дискретна математика пропонує:

– універсальні засоби (мови) формалізованого подання об’єктів;

– засоби коректної обробки інформації, наданої цими мовами;

– можливості й умови переходу з однієї мови опису на іншу зі збереженням змістовної цінності моделей.

Важливість оволодіння методами дискретної математики зумовлена тим, що сучасна інформаційна техніка базується на дискретних поданнях знань. І часто ситуації, що потребують прийняття рішень, настільки складні й невизначені, що їх не можна описати, використовуючи апарат класичної математики. Тому необхідні методи формалізованого подання реальних ситуацій, явищ, процесів: теоретико-множинні, графічні, логічні.

Методичні вказівки присвячено вивченню можливостей застосування математичних методів, що вивчає навчальна дисципліна, до розв’язання завдань планування, управління, контролю та ін. Велику увагу приділено мережним системам як основі структури управління й функціонування переважної більшості сучасних систем.

Мета: отримання фундаментальної підготовки здобувачами з теорії дискретних систем.

Завдання: отримання здобувачами теоретичних і практичних засад з теорії множин і відношень, теорії графів (основні поняття, основні оптимізаційні задачі на графах і способи їх розв’язання) та вміння застосовувати отримані знання для розв’язання прикладних задач у галузі інформаційних технологій.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми здобувачі повинні

знати:

– історію розвитку математичного апарату, орієнтованого на формалізацію дискретних процесів;

– основні теоретичні відомості з теорії множин;

– основні теоретичні відомості з теорії відношень;

– основи алгебри логіки (перемикальні функції, особливості їх використання);

– основні поняття теорії графів;

– основні оптимізаційні задачі на графах;

– способи розв’язання оптимізаційних задач на графах;

– методи дискретної математики в галузі опису та формалізації дискретних процесів;

уміти:

– використовувати апарат дискретної математики для формалізації та математичного опису задач, що виникають у сфері науки й виробництва;

– поєднати прикладні задачі з відповідними моделями множин, функцій і відношень, а також надавати інтерпретацію відповідних операцій;

– виконувати перехід від словесного подання знань до їх математичного вигляду;

– надавати перемикальні функції у різних видах за допомогою нормальних і досконалих нормальних форм і виконувати їх мінімізацію;

– розв’язувати основні оптимізаційні задачі на графах;

– моделювати задачі інформатики з використанням графів;

– поєднати графи зі структурами даних, алгоритмами й обчислюваннями;

– застосовувати отримані знання для розв’язання прикладних задач з програмування, організації баз даних і знань, комп’ютерних мереж тощо.

Компетентності та програмні результати навчання

Навчальна дисципліна «Дискретна математика» (ООК 10) забезпечує формування таких **компетентностей.**

ІК. Здатність розв'язувати складні спеціалізовані задачі та практичні проблеми під час професійної діяльності в комп'ютерній галузі або навчання, що передбачає застосування теорії та методів комп'ютерної інженерії і характеризується комплексністю та невизначеністю умов.

ЗК 1. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

ЗК 2. Здатність учитися й оволодівати сучасними знаннями.

ЗК 3. Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.

ЗК 7. Уміння виявляти, ставити й розв'язувати проблеми.

ФК 15. Здатність аргументувати вибір методів розв'язування спеціалізованих задач, критично оцінювати отримані результати, обґрунтовувати й захищати прийняті рішення.

Засвоєння змісту навчальної дисципліни забезпечує формування таких **програмних результатів**.

ПРН 1. Знати й розуміти наукові положення, що покладені в основу функціонування комп'ютерних засобів, систем і мереж.

ПРН 3. Знати новітні технології в галузі комп'ютерної інженерії.

ПРН 7. Уміти розв'язувати задачі аналізу й синтезу засобів, характерних для спеціальності.

ПРН 8. Уміти системно мислити й застосовувати творчі здібності до формування нових ідей.

ПРН 16. Уміти оцінювати отримані результати й аргументовано захищати прийняті рішення.

ПРН 17. Спілкуватись усно й письмово з професійних питань українською мовою та однією з іноземних мов (англійською, німецькою, італійською, французькою, іспанською).

ПРН 19. Здатність адаптуватись до нових ситуацій, обґрунтовувати, приймати й реалізовувати в межах компетенції рішення.

1 ПЕРЕЛІК ПРАКТИЧНИХ РОБІТ

Практична робота № 1

Тема. Поняття множини, основні операції з множинами, діаграми Ейлера–Венна

Мета: набути практичних навичок роботи з основними операціями з множинами.

Короткі теоретичні відомості

Множина – певна сукупність об'єктів, що розрізняються, але сприймаються як єдине ціле. Об'єкти, з яких складена множина, називаються його елементами.

Способи задання множин

1. Вербальний (словесний) за допомогою опису характерних властивостей, які повинні мати елементи множин.

2. Список (перелік) усіх елементів у фігурних дужках.

{1, 2, 3, ...};

{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

3. Предикатний (висловлювальний, породжувальний) за допомогою предиката, тобто множина задається у вигляді {x: P(x)} або {x | P(x)}, де P(x) набуває значення «істина» для елементів множини. Приклади предикатів:

{1, 2, 3, 4, ...} = {x | x – натуральне число};

{0, 1, 2, 3, 4,..., 9} = {x | x – цифра десяткової системи}.

4. Аналітичний – за допомогою певного математичного виразу.

Наведені приклади показують, що множини бувають скінченими та нескінченими.

Операції з множинами

Розглянемо дві множини *A* та *B* і введемо кілька операцій з ними. Для графічної ілюстрації використовуватимемо діаграми Ейлера–Венна.

1. *Об'єднання A і B* ($A \cup B$) – множина, що складається з усіх елементів множини A, усіх елементів множини B і не містить ніяких інших елементів.

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ або $x \in B\}$

2. *Перетин A і B* ($A \cap B$) – множина, що складається з тих і тільки тих елементів, які належать одночасно множині A та множині B.

$A \cap B = \{x \mid x \in A$ и $x \in B\}$

3. *Різниця A і B* (відносне доповнення) – множина, що складається з тих і тільки тих елементів, які належать множині *A* та не належать *B* .

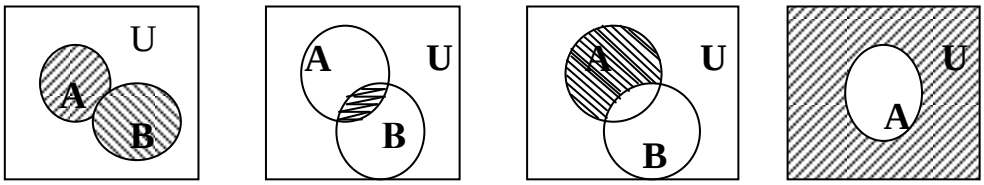
$A \backslash B = \{x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$

4. *Диз'юнктивна сума A і B* ($A \oplus B$ симетрична різниця) – множина, що складається з усіх елементів *A,* які не належать множині *B*, і усіх елементів *B,* які не належать множині *A,* та яка не містить ніяких інших елементів.

Очевидно, що $A \oplus B = (A-B) \cup (B-A)$.

5. *Доповненням множини A до множини U* називають множину, що складається з тих і тільки тих елементів, які не належать множині *A*, а належать *U*.

$$\overline{A} = \{x \mid x \in U \text{ и } x \notin A\}$$



$A \cup B$ $A \cap B$ $A \backslash B$ $\bar{A}$

Приклади розв'язання задач

Приклад 1.1. Задати різними способами множину *N* усіх натуральних чисел: 1, 2, 3...

Розв'язання

1. Множина *N* містить усі цілі додатні числа $N = \{x{:}x$ – ціле додатнє число$\}$.

2. Списком $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

3. Породжувальна процедура містить два правила:

а) $1 \in N$; б) якщо $n \in N$, то $n + 1 \in N$.

Приклад 1.2. Задати різними способами множину M усіх парних додатних чисел, що не перевищують 100.

Розв'язання

1) $M_{2n} = \{2, 4, 6, ..., 100\}$;

2) а) $2 \in M_{2n}$; б) якщо $n \in N$, то $(n+2) \in M$; в) $n \le 98$;

3) $M_{2n} = \{n : n$ – ціле додатнє число, що не перевищує $100\}$ або

$M_{2n} = \{n : n \in N$ і $n/2 \in N, n \le 100\}$.

Приклад 1.3. Нехай універсальна множина U – множина всіх працівників певної фірми; A – множина всіх працівників цієї організації, старших за 35 років; B – множина працівників, що мають стаж роботи не більше 10 років; C – множина менеджерів фірми. Яка характеристична властивість кожної з множин:

а) $\overline{B}$; б) $\overline{A} \cap B \cap C$; в) $A \cup (B \cap \overline{C})$; г) B / C; д) C / B?

Розв'язання

а) $\overline{B}$ – множина працівників організації, стаж роботи яких не перевищує 10 років;

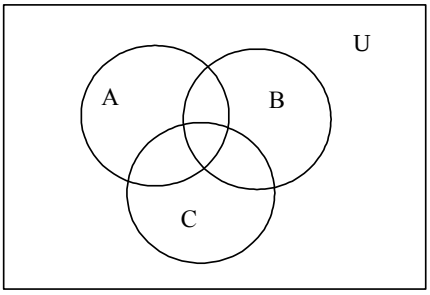
б) $\overline{A} \cap B \cap C$ – множина менеджерів фірми не старше 35 років, що мають стаж роботи не більше 10 років;

в) $A \cup (B \cap \overline{C})$ – множина всіх працівників фірми старше 35 років, а також працівників, що не є менеджерами, стаж роботи яких більший за 10 років;

г) B / C – множина робітників організації, що працюють не менеджерами, зі стажем роботи не більше 10 років;

д) C / B – множина менеджерів зі стажем роботи не більше 10 років.

Приклад 1.4. Проілюструвати справедливість відношення $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (властивість дистрибутивності зліва операції перетину $\cap$ відносно об'єднання $\cup$), якщо задано



$U = \{a, b, c, d, e\}$,

$A = \{a, b\}$, $B = \{a, c, d\}$, $C = \{b, c, d, e\}$.

Розв'язання

Тоді ліва частина рівності

$$A \cap (B \cup C) = \{a, b\} \cap (\{a, c, d\} \cup \{b, c, d, e\}) = \\ = \{a, b\} \cap \{a, b, c, d, e\} = \{a, b\},$$

а права частина рівності:

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = (\{a, b\} \cap \{a, c, d\}) \cup (\{a, b\} \cap \{b, c, d, e\}) = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}.$$

Отже, ліва і права частини відношення співпадають, тобто рівність підтверджено.

Приклад 1.5. Довести, що для довільних множин A і B має місце відношення $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$.

Розв'язання

Відмітимо спочатку, що якщо $a \notin \overline{A}$, то $a \in A$, і наведемо доведення від супротивного, тобто припустимо, що $A \subseteq B$ і $\overline{B} \not\subset \overline{A}$.

Тоді:

1) $A \subseteq B \Leftrightarrow$ якщо $a \in A$, то $a \in B$.

З іншого боку,

2) $\overline{B} \not\subset \overline{A} \Rightarrow$ існує елемент a такий, що $a \in \overline{B}$ і $a \notin \overline{A} \Rightarrow a \in \overline{B}$ і $a \in A$.

Але з урахуванням п. 1 і п. 2:

$a \in A$ і $a \in \overline{B} \Rightarrow a \in B$ і $a \in \overline{B} \Rightarrow a \in (B \cap \overline{B}) = \varnothing$ (протиріччя).

Отже, припущення $\overline{B} \not\subset \overline{A}$ невірне і тому $\overline{B} \subseteq \overline{A}$, тобто $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$. Аналогічно можна показати, що $\overline{B} \subseteq \overline{A} \Rightarrow A \subseteq B$ і, отже, $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$, що й необхідно було довести.

Задачі для самостійного розв'язання

Виконати індивідуальне завдання відповідно до табл. 1.1, номер варіанта відповідає номеру прізвища здобувача у списку.

Таблиця 1.1 – Індивідуальні завдання

Варіант	**№ завдання**
1, 10, 19	1, 4 (а, в), 6 (а, б), 9 (в)
2, 11, 20	2, 4 (б, г), 8, 7 (л, ж)
3, 12, 21	3, 4 (д, е), 7 (к, й), 10 (д)
4, 13, 22	1, 5 (а, в), 7 (е, з), 10 (г)
5, 14, 23	2, 5 (б, д), 6 (б, в), 10 (в)
6, 15, 24	3, 5 (г, е), 7 (и, і), 9 (а)
7, 16, 25	1, 7 (а, в), 6 (в, г), 10 (б)
8, 17, 26	2, 5 (ж, з), 7 (г, д), 9 (б)
9, 18, 27	3, 7 (б, м), 6 (а, г), 10 (а)

Завдання

1. Задати різними способами множину M_{2n} усіх чисел, що є степенями двійки: 2, 4, 8, 16, ... і не перевищують 300.

2. Задати різними способами множину натуральних чисел, кратних п’яти: 5, 10, 15, 20, ...

3. Задати різними способами множину натуральних чисел, кратних семи: 7, 14, 21, ... і не перевищують 100.

4. Для множин A, B, $C \subseteq U$ з прикладу 3 визначити змістове значення таких множин:

а) $A \cap (B / C)$;

б) $(A \cap B) / C$;

в) A / B ;

г) $B / \overline{A}$;

д) $(A \cap B) \cup C$;

е) $A \cap (B \cup C)$.

5. Нехай $A = \{1, 2, 5, 7, 11\}$, $B = \{2, 3, 5, 11, 12\}$, $C = \{1, 3, 7\}$. Визначити:

а) $A \cup B \cup C$;

б) $A \cap B \cap C$;

в) $A / (B \cup C)$;

г) $(A / B) \cup C$;

д) $(A \cup B) / (A \cap B)$;

е) $(A / B) \cap C$;

ж) $(A / B) \cap \overline{C}$

з) $(A / C) \cup \overline{B}$.

6. Указати, які з таких тверджень справедливі:

а) $0 \in \varnothing$; б) $\varnothing = \{0\}$; в) $|\{\varnothing\}| = 0$; г) $|\varnothing| = 0$.

7. Нехай $U = \{a, b, c, d\}$, $X = \{a, c\}$, $Y = \{a, b, d\}$, $Z = \{b, c\}$. Визначити множини:

а) $X \cap \overline{Y}$;

б) $(X \cap Z) \cup \overline{Y}$;

в) $X \cup (Y \cap Z)$;

г) $(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$;

д) $X \cup Y$;

е) $\overline{X} \cap \overline{Y}$;

ж) $\overline{X \cap Y}$;

з) $(X \cup Y) \cup Z$;

и) $X \cup (Y \cup Z)$;

і) $X / \overline{Z}$;

й) $(X / Z) \cup (Y / Z)$;

к) $X \cup (\overline{Y} \cap Z)$

л) $(\overline{X} \cap Z) \cup (Y / \overline{Z})$

м) $(\overline{X} \cup Z) \cap (\overline{Y} / Z)$.

8. Дані дві довільні множини A і B – такі, що $A \cap B = \varnothing$. Що являють собою A / B і B / A?

9. Нехай дані множини A, B, C – такі, що $A \cup B \cup C = U$ і A, B, C попарно не перетинаються. Довести, що

а) $\overline{A} = B \cup C$, б) $\overline{B} = A \cup C$, в) $\overline{C} = A \cup B$.

10. Нехай дані множини A, B, C, причому $C \subseteq B$. Довести, що

а) $A \cap C \subseteq A \cap B$;

б) $A \cup C \subseteq A \cup B$;

в) $A / B \subseteq A / C$;

г) $C / A \subseteq B / A$;

д) $\overline{B} / A \subseteq \overline{C} / A$.

Контрольні питання

1. Що таке множина? Наведіть приклади різних множин.

2. Як можна задати множину?

3. У яких випадках можна говорити, що множини К1, К2 і К3 є рівними?

4. Що таке скінченна та нескінченна множини?

5. До якої з цих множин належить порожня множина?

6. Для чого використовують порожню множину?

7. Що таке підмножина?

8. Чи завжди будь-яка множина містить порожню множину? Аргументуйте відповідь.

9. Чим відрізняється за значенням строге включення $\subset$ від включення $\subseteq$? Аргументуйте відповідь.

10. Чим відрізняється поняття включення від поняття належності?

11. Як розрізнюють елементи множини та її підмножини? Відповідь ілюструвати прикладами.

12. Чи може множина входити до складу своїх елементів?

Література: [1–6, 9, 11, 12].

Практична робота № 2

Тема. Властивості операцій з множинами

Мета: набути практичних навичок застосування властивостей множин і доведення тотожностей.

Короткі теоретичні відомості

Операції з множинами, як і операції з числами, мають деякі властивості. Останні виражаються сукупністю тотожностей незалежно від конкретного вмісту множин, що входять до них, і є підмножинами деякого універсуму. Основні властивості операцій з множинами подано в таблиці.

Комутативний закон	
1а) $A\cup B=B\cup A$	1б) $A\cap B=B\cap A$
Асоціативний закон	
2а) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$	2б) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
Дистрибутивний закон	
3а) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	3б) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
Властивості $\varnothing$ та U	
4а) $A\cup\varnothing=A$ 5а) $A\cup\overline{A}=U$ 6а) $A\cup U=U$ 7а) $\overline{\varnothing}=U$	4б) $A\cap U=A$ 5б) $A\cap\overline{A}=\varnothing$ 6б) $A\cap\varnothing=\varnothing$ 7б) $\overline{U}=\varnothing$
Закон ідемпотентності (самопоглинання)	
8а) $A\cup A=A$	8б) $A\cap A=A$
Закон поглинання	
9а) $A\cup(A\cap B)=A$	9б) $A\cap(A\cup B)=A$
Теорема де Моргана	
10а) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$	10б) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$
Властивості доповнення, різниці та рівності	
11) $A\cup B=U\wedge A\cap B=\varnothing\Rightarrow B=\overline{A}$ 12) $\overline{\overline{A}}=A$ 13) $A-B=A\cap\overline{B}$ 14) $A\oplus B=(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$ 15) $A\oplus B=B\oplus A$ 16) $(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$ 17) $A\oplus\varnothing=\varnothing\oplus A=A$ 18) $A\subset B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A\cup B=B\Leftrightarrow A\cap\overline{B}=\varnothing$ 19) $A=B\Leftrightarrow(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)=\varnothing$	

Основний метод доведення тотожностей в алгебрі множин ґрунтується на таких твердженнях:

1) дві множини рівні, якщо вони складаються з таких самих елементів;

2) справджується така рівність: $A \subset B$ і $B \subset A \Leftrightarrow A = B$.

Будь-яка теорема алгебри множин виводиться з тотожностей табл. 2. 1. Водночас, властивості 1–5 і 13 можна довести тільки в термінах належності. Такий спосіб був розглянутий на попередньому занятті (приклад 5).

Приклади розв'язання задач

Приклад 2.1. Довести справедливість відношення $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (властивість дистрибутивності справа операції перетину $\cap$ відносно об'єднання $\cup$).

Розв'язання

Множини $X = Y$, якщо $X \subseteq Y$ і $Y \subseteq X$. Тому покажемо спочатку, що $(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$, тобто будь-який довільний елемент a з множини, заданої лівою частиною відношення, належить і множині, заданій правою частиною відношення.

Нехай $a \in (A \cup B) \cap C$.

Тоді
$$a \in (A \cup B) \text{ і } a \in C \Rightarrow (a \in A \text{ або } a \in B) \text{ і } (a \in C) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a \in A \text{ і } a \in C) \text{ або } (a \in B \text{ і } a \in C) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a \in (A \cap C) \text{ або } a \in (B \cap C) \Rightarrow a \in (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Отже, $(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Покажемо, що $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C$, тобто будь-який елемент a з множини, заданої правою частиною відношення, належить і множині, заданій лівою частиною відношення.

Нехай $a \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Тоді

$$a \in (A \cap C) \text{ або } a \in (B \cap C) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a \in A \text{ і } a \in C) \text{ або } (a \in B \text{ і } a \in C) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a \in A \text{ або } a \in B) \text{ і } (a \in C) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a \in (A \cup B) \text{ і } a \in C \Rightarrow a \in (A \cup B) \cap C.$$

Отже, $(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Отже, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, що необхідно було довести.

Зауваження. Доведення тотожності можна проілюструвати також за допомогою діаграм Ейлера–Венна.

Приклад 2.2. Дано: $A = \{1, 2, 3, \ldots 60\}$;

$B = \{b/b = 2i;\ i = \overline{1,30}\}$;

$C = \{c/c = 3j;\ j = \overline{1,20}\}$;

$D = \{d/d = 6k;\ k = \overline{1,10}\}$.

Визначити, з яких елементів складатимуть множини, задані за допомогою формул алгебри множин:

1) $M_1 = A \cap B \cap C$;

2) $M_2 = B \cap D \cup A \cap C$;

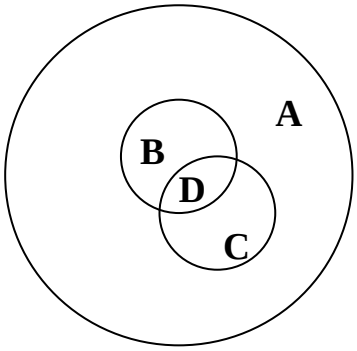
3) $M_3 = A \cup C \cap B \cap D$.

Розв'язання

Помічаємо, що $B \subset A$; $C \subset A$; $D \subset A$. Оскільки $d = 6k \Rightarrow d \text{ м } 2$ і $d \text{ м } 3 \Rightarrow$ $B \cap C = D$. Отже, $M_1 = A \cap B \cap C = D$,

$M_2 = B \cap D \cup A \cap C = D \cup A \cap C = A \cap C = C$,

$M_3 = A \cup C \cap B \cap D = A \cap B \cap D = B \cap D = D$.



Приклад 2.3. Спростити вираз за допомогою властивостей операцій з множинами $(A \cap \underline{B \cap C}) \cup (\overline{A} \cap \underline{B \cap C})$.

Розв'язання

За дистрибутивним законом маємо $(B \cap C) \cap (A \cup \overline{A})$.

За властивістю $\varnothing$ та U маємо $(B \cap C) \cap U = B \cap C$.

Приклад 4. Спростити вираз за допомогою властивостей операцій з множинами $(A\cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A\cup \overline{B})$.

Розв'язання

Використовуючи закон комутативності, поміняємо місцями другу і третю дужки:

$(A\cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A\cup \overline{B}) = (A\cup B) \cap (A\cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B)$.

Застосуємо дистрибутивний закон для першої та другої дужок і властивість $\varnothing$ та U:

$(A\cup B) \cap (A\cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B) = \left(A \cup (B \cap \overline{B})\right) \cap \left(\overline{A} \cup B\right) = A \cap \left(\overline{A} \cup B\right)$.

Скористаємося законом дистрибутивності:

$A \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B)$.

Використовуємо властивість $\varnothing$:

$A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Отримаємо $(A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) = \varnothing \cup A \cap B = A \cap B$.

Отже, $(A\cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A\cup \overline{B}) = A \cap B$.

Приклад 5. Задано універсальну множину U = {1, 2, 3, …, 60} і чотири її підмножини:

A = {a є U : a = p × i},

B = {b є U : b = g × j},

C = {c є U : c = r × k},

D = {d є U : d = s × n},

i, j, k, n = 1, 2, …;

p = 1, g = 4, r = 3, s = 8.

Зобразити за допомогою діаграм Ейлера–Венна відношення між множинами U, A, B, C, D. Зазначити кількість елементів множини F, обумовленої такою формулою алгебри множин:

$F = (A \cup C \cap D) \cup (\overline{B \cap D}) \cap D$.

Розв’язання

Універсальну множину зображуємо графічно у вигляді множини точок прямокутника. Окремі області в середині цього прямокутника означатимуть різні підмножини універсальної множини. Зображення множин у прямокутнику, що має універсальна множина, називають діаграмою Ейлера–Венна. Виконуємо аналіз можливого зв’язку між елементами заданих множин A, B, C, D.

$U = \{1, 2, 3, \ldots, 60\}$;

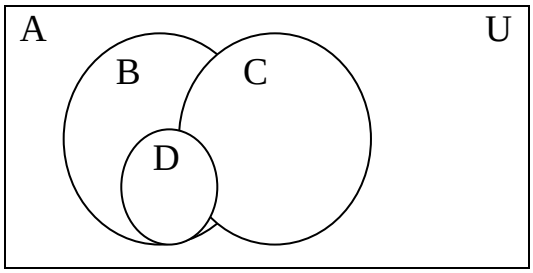
$A = \{a \in U : a = 1 \times i\} = \{1, 2, 3, \ldots, 60\}$ 60 елементів;

$B = \{b \in U : b = 4 \times j\} = \{4, 8, 12, \ldots, 60\}$ 15 елементів;

$C = \{c \in U : c = 3 \times k\} = \{3, 6, 9, \ldots, 60\}$ 20 елементів;

$D = \{d \in U : d = 8 \times n\} = \{8, 16, 24, \ldots, 56\}$ 7 елементів.

Зрозуміло, що $B \subset A$, $C \subset A$, $D \subset A$, $B \cap C$, $D \subset B$, $C \cap D$.



Для визначення кількості елементів множин, обумовлених формулою F, виконаємо спрощення за допомогою тотожностей алгебри множин:

$$F = (A \cup C \cap D) \cup (\overline{B \cap D}) \cap D.$$

Оскільки кількість елементів U дорівнює кількості елементів A, то $A = U$.

З аналізу зв’язку між елементами заданих множин A, B, C, D маємо:

$\overline{B \cap D} = \overline{D}$;

$\overline{D} \cap D = \varnothing$;

$A \cup C \cap D = A$.

Тоді $F = A \cup \varnothing = A$.

Як результат, отримали F, що описує множину A, яка складається з 60 елементів, а саме $\{1, 2, 3, \ldots, 60\}$.

Задачі для самостійного розв’язання

Виконати індивідуальне завдання відповідно до таблиці 2.1, номер варіанта відповідає номеру прізвища здобувача у списку

Таблиця 2.1 – Індивідуальні завдання

Варіант	**№ завдання**
1, 10, 19	1 (а), 2 (а), 3 (а), 4 (1)
2, 11, 20	1 (б), 2 (б), 3 (б), 4 (2)
3, 12, 21	1 (в), 2 (в), 3 (в), 4 (3)
4, 13, 22	1 (г), 2 (г), 3 (г), 4 (4)
5, 14, 23	1 (д), 2 (д), 3 (д), 4 (5)
6, 15, 24	1 (е), 2 (е), 3 (е), 4 (6)
7, 16, 25	1 (ж), 2 (ж), 3 (ж), 4 (7)
8, 17, 26	1 (з), 2 (з), 3 (з), 4 (8)
9, 18, 27	1 (и), 2 (и), 3 (и), 4 (9)

Завдання

1. Нехай $A, B, C \subseteq U$. Проілюструвати за допомогою діаграм Ейлера–Венна справедливість таких відношень:

а) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

б) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

в) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

г) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

д) $A \cup (A \cap B) = A$;

е) $A \cap (A \cup B) = A$;

ж) $(A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right) = A$;

з) $A \cup \left(\overline{A} \cap B\right) = A \cup B$;

и) $(A \cap B) \cap (A \cup B) = A \cap B$.

2. Довести тотожності попереднього завдання на підставі поняття рівності множин і в термінах належності (розв’язання прикладу 1).

3. Довести тотожності:

а) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) = A \cup B$;

б) $\left(A \cap \overline{B} \cup C\right) \cap (A \cup B) \cap \overline{C} = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$;

в) $A \cap \left(\left(B \cap \overline{C} \cup \overline{C \cup B}\right) \cap C\right) \cap \overline{A} = \varnothing$;

г) $\left(\overline{A \text{ Y } B}\right)\overline{\overline{D}}\left(B \text{ Y } D\right)C\left(A \text{ Y } B\right)A\overline{\overline{C}} \text{ Y } A\left(\overline{A}B\right)\text{Y}\left(A \text{ Y } \overline{A}\right) = 1$;

д) $((\overline{B} \cap A) \cup C) \cap ((\overline{A \cup C}) \cup B = B \cap C$;

е) $((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{B} \cap C)) \cap ((\overline{A} \cap B) \cup (B \cap \overline{C})) = 0$;

ж) $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) = A$;

з) $(B \cap C) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cup \overline{C}) = 1$;

и) $((A \cup \overline{B}) \cap (\overline{B} \cup C)) \cup ((\overline{A} \cup B) \cap (B \cup \overline{C})) = 1$.

4. Задано універсальну множину U = {1, 2, 3 ,…, 60} і чотири її підмножини A = {a ∈ U : a = p · i}, B = {b ∈ U: b = q·j}, C = {c ∈ U : c = r · k}, D = {d ∈ U : d = s · n}, i, j, k, n = 1, 2, … Значення p, q, r, s наведені у таблиці.

Параметри	**Варіант**								
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
p	3	2	3	1	10	2	3	2	5
q	6	4	5	5	2	4	9	10	2
r	12	24	7	6	3	8	7	6	3
s	5	6	21	15	9	6	21	15	9

Зобразити за допомогою діаграм Ейлера–Венна відношення між множинами U, A, B, C, D. Зазначити кількість елементів множин, обумовлених такими формулами F_i алгебри множин (i – номер варіанта).

Таблиця

$F_1 = \overline{\overline{A} \text{ Y } \overline{B}} \text{ I } \overline{C \text{ I } D} \text{ Y } (\overline{C} \text{ I } \overline{D})$
$F_2 = A \text{ I } \left(\overline{A \text{ I } \overline{C \text{ Y } D} \text{ Y } B}\right)$
$F_3 = \overline{B \text{ I } C} \text{ Y } \overline{\overline{A} \text{ I } D} \text{ Y } \left(A \text{ I } B \text{ I } \overline{C}\right)$
$F_4 = \overline{B} \text{ I } \left(\overline{A \text{ Y } C} \text{ Y } \overline{C \text{ I } D}\right)$
$F_5 = \left(A \text{ I } B\right) \text{Y } \left(\overline{A} \text{ I } C \text{ I } D\right) \text{Y } \left(A \text{ I } \overline{B} \text{ I } \overline{D}\right)$
$F_6 = \left(A \text{ I } \overline{C} \text{ I } \overline{D}\right) \text{Y } \left(\overline{A \text{ I } B \text{ I } D}\right) \text{Y } (A \text{ I } B)$
$F_7 = \left(\overline{A} \text{ Y } B \text{ Y } \overline{C}\right) \text{I } \left(\overline{A \text{ Y } \overline{B} \text{ Y } C \text{ Y } \overline{D}}\right)$
$F_8 = \left(\overline{A \text{ Y } \overline{B} \text{ Y } C \text{ Y } \overline{D}}\right) \text{I } \left(\overline{\overline{A} \text{ I } B \text{ I } \overline{C} \text{ I } D}\right)$
$F_9 = \left(\overline{A \text{ Y } B}\right) \text{I } \left(\overline{B \text{ Y } C}\right) \text{I } \left(\overline{C \text{ Y } D}\right) \text{I } \left(\overline{A \text{ I } \overline{B} \text{ I } C \text{ I } D}\right)$

Контрольні питання

1. Що таке універсум?
2. Що являють собою діаграми Ейлера–Венна?
3. Які властивості операцій з множинами існують?
4. Доведіть деякі з операцій з множинами.
5. Які методи доведення тотожностей алгебри множин ви знаєте?

Література: [1–6, 9, 11, 12].

Практична робота № 3

Тема. Поняття впорядкованої множини, прямий добуток множин. Системи рівнянь, що задані множинами

Мета: закріплення теоретичних знань і набуття навичок розв'язання систем рівнянь, що задані множинами.

Короткі теоретичні відомості

Упорядкованою парою $<x, y>$ називають сукупність двох елементів x і y, розташованих у певному порядку.

Дві впорядковані пари $<x, y>$ і $<u, v>$ рівні між собою тоді й тільки тоді, коли $x = u$ і $y = v$.

Аналогічно можна розглядати трійки, четвірки, n-ки елементів

$<x_1, x_2, \ldots x_n>$.

Прямим (декартовим) добутком двох множин A і B називають множину впорядкованих пар, таких, що перший елемент кожної пари належить множині A, а другий – множині B:

$A \times B = \{<a, b>, \mid a \in A \text{ і } b \in B\}$.

У загальному випадку прямим добутком n множин $A_1, A_2, \ldots A_n$ називають множину $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, що складається з упорядкованих наборів елементів $<a_1, a_2, \ldots, a_n>$ довжини n, таких, що i-ий a_i належить множині A_i, $a_i \in A_i$.

Французький математик і філософ Декарт уперше запропонував координатне зображення точок площини. Це історично перший приклад прямого добутку.

Властивості прямого добутку:

1) $X \times Y \neq Y \times X$;

2) $X \times Y = \varnothing \Rightarrow X = \varnothing$ або $Y = \varnothing$.

Кількість елементів у кінцевій множині M називають потужністю множини M і позначають $|M|$.

Теорема: нехай $A_1\ A_2 \ldots A_n$ – скінчені множини і $|A_1| = m_1$, $|A_2| = m_2$, …, $|A_n| = m_n$, тоді потужність множини $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_n$.

Наприклад: A = {a, b, c}, B = {a, d}.

$$|A \times B| = |A| \times |B| = 3 \times 2 = 6.$$

Якщо з кожним елементом множини *A* порівняти єдиний елемент множини *B* і до того ж усякий елемент множини *B* виявляється порівняним з одним, і лише одним, елементом множини *A*, – це означає, що між множинами *A* і *B* існує *взаємно однозначна відповідність.* Множини *A* і *B* у цьому разі називають *еквівалентними або рівнопотужними.*

Еквівалентність множин позначається так: $A \sim B$.

Очевидно, що дві скінчені множини еквівалентні тоді, і тільки тоді, коли кількість елементів у них однакова. Наприклад, множини $A = \{4, 5, 6\}$ і $B = \{x, y, z\}$ еквівалентні, $A \sim B$. Взаємна однозначна відповідність може бути встановлена між елементами 4 і *x*, 5 і *y*, 6 і *z*.

Множину, еквівалентну множині натуральних чисел $N = \{1, 2, 3, ..., n.\}$, називають *рахунковою*.

Інакше кажучи, множина рахункова, якщо її елементи можна перенумерувати.

Приклади розв’язання задач

Приклад 3.1. Визначити прямий добуток множин:

а) $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$;

б) $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$, $B = \{y \mid 2 \leq y \leq 3\}$.

Розв'язання

а) Тоді $A \times B = \{<1, 2>, <1, 3>, <2, 2>, <2, 3>\}$.

б) Тоді $A \times B = \{< x, y >, \mid 0 \le x \le 1$ та $2 \le y \le 3\}$.

Отже, множина $A \times B$ складається з точок, що лежать у середині і на межі прямокутника, утвореного прямими $x = 0$ і $x = 1$, $y = 2$ і $y = 3$.

Приклад 3.2. Визначити кількість маршрутів з пункту M у пункт N через пункт K, якщо відомо, що з M у K ведуть 5 доріг, а з K в N – 3 дороги.

Розв'язання

Нехай $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ – дороги з M в K,

$B = \{b_1, b_2, b_3\}$ – дороги з K в N.

Тоді дорогу з M у N можна подати парою $(a_i; b_j)$, де $i = \overline{1.5}$, $j = \overline{1.3}$.

Отже, $A \times B$ – це множина доріг з M у N, кількість яких дорівнює $|A \times B| = |A| \times |B| = 5 \times 3 = 15$.

Приклад 3.3. Визначити кількість усіх п'ятицифрових чисел.

Розв'язання

Маємо п'ять множин: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5.

$A_1 = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$

$A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$.

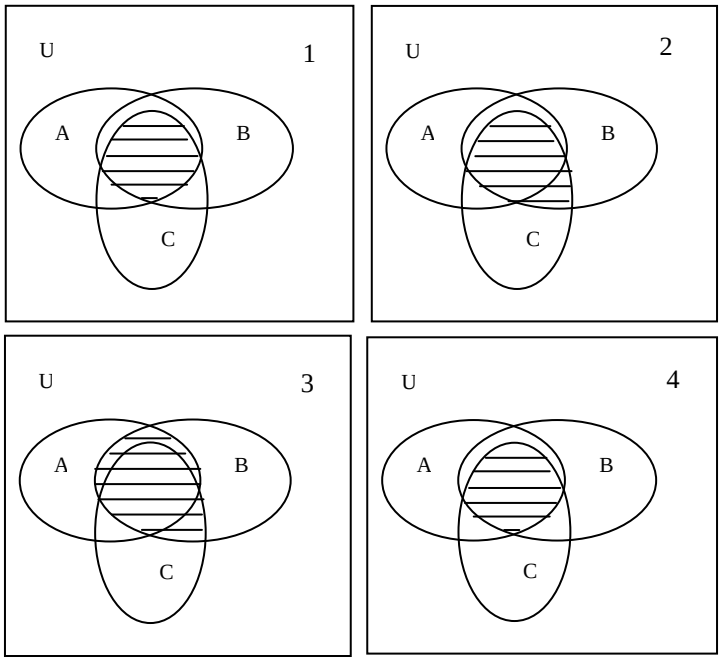
Тоді всі п'ятицифрові числа складуть прямий добуток потужностей цих множин: $|A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5| = 9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 90000$.

Приклад 3.4. Задано множини A, B, C, що знаходяться в загальному положенні. Необхідно за допомогою діаграм Ейлера–Венна розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} C = A \text{ I } B \\ B \text{ I } U = C \\ (A \text{ I } B) \text{ Y } \left(\overline{\overline{B} \text{ Y } \overline{C}}\right) = U \end{cases}$$

Розв’язання

Щоб розв’язати цю систему рівнянь, необхідно для кожного рівняння побудувати діаграму Ейлера–Венна, причому знак рівності умовно можна узяти як перетин множин лівої та правої частини рівняння. Тоді розв’язком системи рівнянь буде така діаграма, на якій зображено результат перетину діаграм кожного рівняння.



1) $C = A \cap B$ тобто $C \cap (A \cap B)$;

2) $B \cap U = C$, тобто $B \cap C$;

3) $(A \cap B) \cup \left(\overline{\overline{B} \cup \overline{C}}\right) = U$, або $(A \cap B) \cup \left(\overline{\overline{B} \cup \overline{C}}\right)$,

або $(A \cap B) \cup (B \cap C) = B \cap (A \cup C)$.

4) підсумкова діаграма є перетином результатів на діаграмах 1), 2), 3). Отже, розв’язок системи збігається із зображенням на діаграмі 1.

Задачі для самостійного розв’язання

Виконати індивідуальне завдання відповідно до табл. 3.1, номер варіанта відповідає номеру прізвища здобувача у списку

Таблиця 3.1 – Індивідуальні завдання

Варіант	**№ завдання**
1, 10, 19	1 (а), 2 (1,10)
2, 11, 20	1 (б), 2 (2,11)
3, 12, 21	1 (в), 2 (3,12)
4, 13, 22	1 (г), 2 (4,13)
5, 14, 23	1 (д), 2 (5,14)
6, 15, 24	1 (е), 2 (6,15)
7, 16, 25	1 (ж), 2 (7,16)
8, 17, 26	1 (з), 2 (8, 17)
9, 18, 27	1 (и), 2 (9, 18)

Завдання

1. а) Навести приклад множин A, B, C, кожна з яких має потужність, за якої виконувалася б рівність: $A \cup B = C$;

б) навести приклади множин A, B і C, для яких виконується рівність $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;

в) нехай A – множина точок відрізка [0, 1], а B – множина точок усієї числової осі. Які з відношень справедливі: а) A = B; б) A ~ B; в) $A \supset B$; г) $A \supseteq B$; д) $A \not\subset B$; е) $A \in B$;

г) визначити всі підмножини множини A= {1, 2, 3, 4};

д) навести приклади множин A, B і C, для яких одночасно виконується рівність $A \cup B = A$ і $A \cap B \cap C = C$;

е) навести приклади множин A, B і C, для яких одночасно виконується рівність $A \cup B \cup C = A$ і $A \cap B \cap C = C.\cap$;

ж) нехай A – множина цілих чисел, а B – множина парних чисел. Які з відношень справедливі: а) $A = B$; б) $A \sim B$; в) $A \supset B$; г) $A \in B$; д) $A \not\subset B$;

з) яка множна має більшу потужність: а) множина натуральних чисел або множина парних чисел; б) множина парних чисел або множина простих чисел? Чому?

и) навести приклади множин A, B і C, для яких одночасно виконується рівність $A \cap C = A - B$.

2. Задано множини A, B, C, D, що знаходяться в загальному положенні. Необхідно за допомогою діаграм Ейлера–Венна розв’язати систему рівнянь.

1. $\begin{cases} A = B \cap \overline{C} \\ \overline{C} \cap \overline{D} = U \\ A \cup C = \overline{B \cap D} \\ C = \overline{A \cup B} \cap \overline{D} \end{cases}$

2. $\begin{cases} C = D \cup A \cup B \\ A \cap \overline{B} = C \\ \overline{A \cup B} \cup \overline{A \cup C} = D \\ A \cup B = B \cup C \cup D \end{cases}$

3. $\begin{cases} B = (A \cup D) \setminus C \\ \overline{C} \cup \overline{D} = U \\ D = A \cap B \\ \overline{\overline{A} \cap \overline{B}} \cup C = D \end{cases}$

4. $\begin{cases} B = C \cup D \\ A \cap B \cap C = \overline{C} \\ (A \cap B) \cup (B \cap C) = U \\ A \cup B = C \setminus D \end{cases}$

5. $\begin{cases} D = C \cap A \cup B \\ B \cup C = D \cap U \\ (A \cup B) \cap \left(B \cup \overline{C}\right) = D \\ A = \overline{B \cup C} \end{cases}$

6. $\begin{cases} B \cap \overline{A \cup C} = D \\ C = B \setminus D \\ A \cup C = B \setminus D \\ C \cup D \cup A = B \end{cases}$

7. $\begin{cases} A \cap B = \overline{C} \\ \overline{\overline{C} \cap \overline{D}} \cap A = U \\ (A \cup D) \setminus C = B \\ B \cup C = A \cup D \cup \overline{\varnothing} \end{cases}$

8. $\begin{cases} C \cap D = A \cup B \\ \overline{B} \cup \overline{A} = U \\ A \cap C = B \cup D \\ B = \overline{A \cup C} \cap D \end{cases}$

9. $\begin{cases} D = (A \cap B) \cup \overline{C} \\ \overline{A} \cap \overline{D} = U \\ C = A \cup B \\ \overline{\overline{A} \cup \overline{D}} \cap B = C \end{cases}$

10. $\begin{cases} A = C \cap D \\ A \cup B \cap C = D \\ \left(\overline{A} \cup \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap C\right) = D \\ A \cup B = C \cup \overline{D} \end{cases}$

11. $\begin{cases} C = D \cup A \cap B \\ B \cap C = D \cup \varnothing \\ (A \cap B) \cup (B \cap C) = U \\ U = B \cap C \end{cases}$

12. $\begin{cases} B \cup \overline{A \cap \overline{C}} = U \\ \overline{C} = B \setminus \overline{D} \\ A \cap C = B \cup D \\ C \cap D \cap A = \overline{B} \end{cases}$

13. $\begin{cases} \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = C \\ \overline{\overline{C} \cup \overline{A}} \cup D = U \\ (A \cap D) \cup \overline{C} = \overline{B} \\ B \cap C = A \cup D \end{cases}$

14. $\begin{cases} \overline{\overline{C} \cup D} = A \\ B \cap \overline{A} = D \\ A \cup C = B \cap D \\ \overline{B} = A \cup D \end{cases}$

15. $\begin{cases} A = D \cup B \cap \overline{C} \\ A \cup D = \overline{U} \\ \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \cup C \cap \overline{B} = U \\ D = B \cap C \cup \overline{A} \end{cases}$

16. $\begin{cases} C \cup \overline{\overline{B} \cap \overline{C}} = D \\ \overline{C} = B \cup D \\ A \cup D = U \cap \overline{B} \\ C \cup D \cap A = B \end{cases}$

17. $\begin{cases} A \cup B = C \cap \overline{\varnothing} \\ U = \overline{C} \cup \overline{D} \cup A \\ A \cap D = U \\ \left(A \cap \overline{B}\right) \cup (A \cap B) = C \cup D \end{cases}$

18. $\begin{cases} C \cap \overline{B \cup \overline{C}} = U \\ C = B \cup D \cup A \\ A \setminus D = B \cup C \\ C \cap D \cup \overline{A} = U \end{cases}$

Контрольні питання

1. Яку множину називають упорядкованою?
2. Що називають прямим добутком множин?
3. Які множини еквівалентні?
4. Що таке потужність множини?

5. Які множини рахункові?

6. Назвіть множину, яка є підмножиною будь-якої множини.

7. Чи може бути множина еквівалентно своїй підмножині?

8. Потужність якої множини більша: множина натуральних чисел або множина точок відрізка [0, 1]?

9. Чи можна побудувати взаємно однозначну відповідність множини раціональних чисел відрізка [0, 1] і множини раціональних чисел з цього інтервалу? Відповідь обґрунтувати.

Література: [1–6, 9, 11, 12].

Практична робота № 4

Тема. Поняття відношення, способи задання відношень, композиція відношень

Мета: закріплення теоретичних знань і набуття навичок розв'язання задач з теми.

Короткі теоретичні відомості

Поняття відношення використовують для позначення відображень, заданих на одній множині, тобто це дослідження взаємозв'язку між елементами однієї множини.

Бінарним (двомісним) відношенням, визначеним на множинах A і B, називають довільну підмножину декартового добутку цих множин. Той факт, що елементи $a \in A$ та $b \in B$ перебувають у бінарному відношенні R, позначається як aRb або $(a, b) \in R$.

Оскільки бінарне відношення – множина, то способи задання бінарного відношення такі самі, як і способи задання множини. Бінарне відношення може бути задане переліком упорядкованих пар, визначенням загальної властивості впорядкованих пар або матрицею бінарного відношення.

1. $\rho = \{<1, 2>, <2, 1>, <2, 3>\}$ – відношення, задане переліком упорядкованих пар.

2. $\rho = \{<x, y> \mid x+ y = 7,\ x, y$ – дійсні числа$\}$ – відношення, задане визначенням властивості $x+ y = 7$.

3. $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ – скінчена множина. Матрицею бінарного відношення C є квадратна матриця порядку n, елементи якої c_{ij} визначають:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a_i \rho a_j, \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Розглянемо деякі бінарні відношення.

1. Відношення на множині натуральних чисел:

а) відношення «≤» виконується для пар <1, 2>, <5, 5>, не виконується для пари <4, 3>;

б) відношення «є загальний дільник, відмінний від одиниці», виконується для пар <3, 6>, <7, 42>, <21, 15>, але не виконується для пари <3, 28>.

2. Відношення на множині точок площини:

а) відношення «знаходитися на однаковій відстані від точки (0, 0)», виконується для точок (3, 4) і (–2, √21), але не виконується для (1, 2) і (5, 3);

б) відношення «бути симетричним щодо осі OY» виконується для всіх точок (x, y) і $(-x, -y)$.

Областю визначення бінарного відношення ρ називають множину

$D_\rho = \{x \mid$ існує y, що $x\rho y\}$.

Областю значень бінарного відношення ρ називають множину

$R_\rho = \{y \mid$ існує x, що $x\rho y\}$.

Операції з відношеннями

Оскільки відношення є множинами, то всі операції з множинами справедливі для відношень:

$$\rho_1 = \{<1, 2>, <2, 3>, <3, 4>\}.$$

$\rho_2 = \{<1, 2>, <1, 3>, <2, 4>\}$.

$\rho_1 \cup \rho_2 = \{<1, 2>, <1, 3>, <2, 3>, <2, 4>, <3, 4>\}$.

$\rho_1 \cap \rho_2 = \{<1, 2>\}$.

$\rho_1 \setminus \rho_2 = \{<2, 3>, <3, 4>\}$.

Відношення називають оберненим до відношення ρ (позначається ρ^{-1}), якщо $\rho^{-1} = \{<x, y> \mid < y, x> \in \rho\}$.

Композицією двох відношень ρ і σ називають відношення

$\sigma \circ \rho = \{<x, z> \mid$ існує таке y, що $<x, y> \in \rho$ і $< y, z> \in \sigma\}$.

Визначення композиції двох відношень відповідає визначенню складної функції: $y = f(x)$, $z = g(y) \Rightarrow z = g(f(x))$.

Приклади розв'язання задач

Приклад 4.1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Задати бінарне відношення ρ трьома способами.

Розв'язання

1. $\rho = \{<1, 2>, <1, 3>, <1, 4>, <2, 3>, <2, 4>, <3, 4>\}$ – відношення, задане перерахуванням усіх впорядкованих пар.

2. $\rho = \{< a_i, a_j> \mid a_i < a_j;\ \ a_i, a_j \in A\}$ – відношення, задане визначенням властивості «менше» на множині А .

3. $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – відношення, задане матрицею бінарного відношення C.

Приклад 4.2. Записати відношення, обернене до відношення ρ

а) $\rho = \{<1, 2>, <2, 3>, <3, 4>\}$.

б) $\rho = \{<x, y> \mid x - y = 2,\ x, y \in R\}$.

Розв'язання

а) $\rho^{-1} = \{<2, 1>, <3, 2>, <4, 3>\}$;

б) $\rho^{-1} = \{<x, y> \mid < y, x> \in \rho\} = \rho^{-1} = \{<x, y> \mid y - x = 2,\ x, y \in R\} = \{<x, y> \mid -x + y = 2,\ x, y \in R\}$.

Приклад 4.3. Задати композицію відношень:

а) $\rho = \{<x, y> \mid y = sinx\}$ та $\sigma = \{<x, y> \mid y = \sqrt{x}\}$.

б) $\rho = \{<1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <3, 1>\}$ та

$\sigma = \{<1, 2>, <1, 3>, <2, 2>, <3, 2>, <3, 3>\}$.

Розв'язання

а) $\sigma \circ \rho = \{<x, z> \mid$ існує таке y, що $<x, y> \in \rho$ і $<y, z> \in \sigma\} = \{<x, z> \mid$ існує таке y, що $y = sinx$ і $z = \sqrt{y}\} = \{<x, z> \mid z = \sqrt{sinx}\}$.

б) Процес знаходження $\sigma \circ \rho$ відповідно до визначення композиції зручно зобразити таблицею, у якій реалізується перебір усіх можливих значень x, y, z. Для кожної пари $<x, y> \in \rho$ потрібно розглянути всі можливі пари $<y, z> \in \sigma$.

$<x, y> \in \rho$	$<y, z> \in \sigma$	$<x, z> \in \sigma \circ \rho$
<1, 1>	<1, 2>	<1, 2>
<1, 1>	<1, 3>	<1, 3>
<1, 2>	<2, 2>	<1, 2>
<1, 3>	<3, 2>	<1, 2>
<1, 3>	<3, 3>	<1, 3>
<3, 1>	<1, 2>	<3, 2>
<3, 1>	<1, 3>	<3, 3>

Зазначимо, що перший, третій і четвертий, а також другий і п'ятий рядки останнього стовпця таблиці містять однакові пари. Тому отримаємо:

$\sigma \circ \rho = \{<1, 2>, <1, 3>, <3, 2>, <3, 3>\}$.

Приклад 4.4. Нехай β – відношення «є брат», φ – відношення «є сестра». Описати відношення $\beta \cup \varphi$; $\beta \cap \varphi$; $\beta \setminus \varphi$.

Приклад 4.5. Задане бінарне відношення на множині M = {1, 2, 3, 4}. Визначити область визначення, область значень, обернене відношення R^{-1}, перетин і об'єднання R і R^{-1}:

а) R={(1,4), (2,3), (3,2), (3,4), (4,1), (4,3)};

б) R={(2,1), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1)}.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Виписати елементи множини {0, 1, 2} × {a,b}. Визначити область визначення, область значень цього відношення, побудувати його графік.

2. На вулиці є 30 будинків, пронумерованих звичайним способом: непарні номери з одного боку, а парні з іншого боку. Нехай h_n позначає жителя, який живе в будинку з номером n. Описати за допомогою символів відношення N на множині жителів таке, що h_i знаходиться у відношенні N до h_j, якщо вони є сусідами. Виглядатиме N, якщо вулиця є тупиком?

3. Задане бінарне відношення на множині M = {1, 2, 3, 4}. Визначити область визначення, область значень, обернене відношення R^{-1}, перетин і об'єднання R та R^{-1}:

а) R={(1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (3,3), (4,1), (4,4)};

б) R={(1,1), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,3), (4,4)};

в) R={(1,1), (1,4), (2,3), (3,2), (4,1)}.

4. Визначити область визначення, область значень, побудувати графік кожного з цих відношень:

а) $\{(x, y) \in R \times R \mid x^2 = y^2\}$;

б) $\{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 < 1 \text{ и } x > 0\}$;

в) $\{(x, y) \in R \times R | y > 0, \quad y \leq x, \quad x + y < 1\}$.

Контрольні питання

1. Що таке відношення? Яке відношення бінарне?
2. Укажіть способи задання бінарного відношення.
3. Область визначення, область значень бінарного відношення.
4. Які операції з відношеннями ви знаєте?
5. Яке відношення обернене?
6. Як виконується композиція відношень?
7. Чи є множина {(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8)} бінарним відношенням і чому?

Література: [1–6, 9, 13].

Практична робота № 5

Тема. Властивості відношень. Функціональні відношення. Відношення порядку

Мета: набути практичних навичок для роботи з відношеннями.

Короткі теоретичні відомості

Властивості відношень

Відношення ρ називають *рефлексивним* на множині X, якщо для будь-якого $x \in X$ виконується $x \rho x$.

За визначенням, будь-який елемент $< x, x > \in \rho$. Якщо X – скінчена множина, то головна діагональ матриці відношення рефлексії містить тільки одиниці.

Нехай X – множина дійсних чисел і ρ відношення рівності. Це відношення рефлексії, оскільки кожне число дорівнює самому собі.

Відношення ρ називають *симетричним* на множині X, якщо для будь-яких $x, y \in X$ із $x\rho y$ витікає $y\rho x$.

Очевидно, що ρ симетрично тоді, і тільки тоді, коли $\rho = \rho^{-1}$.

Приклад.

Якщо X – скінчена множина, то матриця симетричного відношення симетрична щодо головної діагоналі.

Нехай X – множина дійсних чисел і ρ відношення рівності. Це відношення симетричне, оскільки якщо x дорівнює y, то і y дорівнює x.

Відношення ρ називають *транзитивним* на множині X, якщо для будь-яких $x, y, z \in X$ із $x\rho y$ *і* $y\rho z$ витікає $x\rho z$.

Одночасне виконання умов $x\rho y$, $y\rho z$, $x\rho z$ означає, що пара $<x, z>$ належить композиції $\rho \circ \rho$. Тому для транзитивності ρ необхідно й достатньо, щоб множина $\rho \circ \rho$ була підмножиною ρ, тобто $\rho \circ \rho \subseteq \rho$.

Нехай X – множина дійсних чисел і ρ – відношення $\leq$ (менше або дорівнює). Це відношення транзитивне, оскільки якщо $x \leq y$ і $y \leq z$, то $x \leq z$.

Відношення ρ називають відношенням *еквівалентності* на множині X, якщо воно рефлексивне, симетричне і транзитивне на множині X.

Нехай X – множина дійсних чисел і ρ відношення рівності. Це відношення еквівалентності.

Відношення ρ називають *антисиметричним* на множині X, якщо для будь-яких $x, y \in X$ із $x\rho y$ і $y\rho x$ слідує $x = y$.

За визначенням антисиметричності, щоразу, коли пара $<x, y>$ належить одночасно ρ і ρ^{-1}, має виконуватися рівність $x = y$. Інакше кажучи, $\rho \cap \rho^{-1}$ складається тільки з пар вигляду $< x, x >$.

Нехай X – множина дійсних чисел і ρ відношення $\leq$ (менше або дорівнює). Це відношення антисиметричне, оскільки якщо $x \leq y$, і $y \leq x$, то $x = y$.

Відношення R, що задане на множині M, називають *антирефлексивним*, якщо для будь-якого $x \in M$ xRx хибне.

Відношення ρ називають відношенням *часткового порядку* на множині X, якщо воно рефлексивне, антисиметричне і транзитивне.

Відношення ρ називають відношенням суворого порядку, якщо воно антирефлексивне, антисиметричне і транзитивне.

Відношення, обернене до відношення часткового порядку, є, очевидно, відношенням часткового порядку.

Відношення подільності на множині натуральних чисел є відношенням часткового порядку.

Функціональні відношення

Для математичного аналізу взято таке визначення функції. Змінну y називають функцією від змінної x, якщо за деяким правилом або законом кожному значенню x відповідає одне певне значення $y = f(x)$.

Область зміни змінної x називають областю визначення функції, а область зміни змінної y – областю значень функції. Якщо одному значенню x відповідає декілька (і навіть нескінченно багато значень y), то функцію називають багатозначною. Утім, у курсі аналізу функцій дійсних змінних уникають багатозначних функцій і розглядають однозначні функції. Розглянемо інше визначення функції щодо відношень.

Функцією називають будь-яке бінарне відношення, яке не містить двох пар з рівними першими компонентами і різними другими.

Таку властивість відношення називають однозначністю або функціональністю.

а) $\{<1, 2>, <3, 4>, <4, 7>, <5, 6>\}$ – функція.

б) $\{<x, y>: x, y \in R, y = x^2\}$ – функція.

в) $\{<1, 2>, <1, 4>, <4, 4>, <5, 6>\}$ – відношення, але не функція.

Якщо f – функція, то D_f – *область визначення*, а R_f – *область значень функції f*.

З попередніх прикладів:

а) D_f – {1, 3, 4, 5}; R_f – {2, 4, 6}.

б) $D_f = R_f = (-\infty, \infty)$.

Кожному елементу $x \in D_f$ функція ставить у відповідність єдиний елемент y R_f. Це позначається відомим записом $y = f(x)$. Елемент x називають аргументом функції f, а елемент y – значенням функції f.

Якщо $D_f = X$ і $R_f = Y$, то говорять, що функція f визначена на X і набуває своїх значень на Y, а f називають відображенням множини X *на* Y ($X \to Y$).

Функції f і g рівні, якщо їх область визначення – така сама множина D, і для любого $x \in D$ справедлива рівність $f(x) = g(x)$.

Оскільки функції є бінарними відношеннями, то можна знаходити обернені функції та застосовувати операцію композиції. Композиція будь-яких двох функцій є функція, але не для кожної функції f відношення f^{-1} є функцією.

Способи задання функцій

1. Табличний.

x	x_1	x_2	...	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$

Отже, можуть бути задані функції, визначені на скінчених множинах. Якщо функція, визначена на нескінченній множині (відрізку, інтервалі), задана у вигляді тригонометричних таблиць, таблиць спеціальних функцій тощо, то для обчислення значень функцій у проміжних точках користуються правилами інтерполяції.

2. Функція може бути задана у вигляді формули, що описує функцію як композицію других функцій. Формула задає послідовність обчислення функції:

$f(x) = sin(x + \sqrt{x})$ є композицією таких функцій:

$g(y) = \sqrt{y}$; $h(u, v) = u + v$; $w(z) = sinz$.

3. Функція може бути задана у вигляді рекурсивної процедури. Простим прикладом рекурсивної процедури є обчислення $n!$:

а) $0! = 1$; б) $(n + 1)! = n!(n + +1)$. Багато процедур чисельних методів є рекурсивними процедурами.

4. Можливі способи завдання функції, не що містять способу обчислення функції, а що тільки описують її. Наприклад:

$$f_M(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in M, \\ 0, & \text{якщо } x \notin M. \end{cases}$$

Приклади розв'язання задач

Приклад 5.1. Нехай X – скінчена множина,

а) $X = \{1, 2, 3\}$ і $\rho = \{<1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <2, 1>, <2, 2>, <2, 3>, <3, 1>, <3, 2>, <3, 3>\}$.

б) Відношення на множині людей «жити в одному місті».

Визначити, які властивості мають ці відношення.

Розв'язання

а) Відношення ρ рефлексивне, головна діагональ матриці відношення рефлексії містить тільки одиниці:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відношення ρ симетричне, матриця симетричного відношення симетрична щодо головної діагоналі.

Відношення ρ транзитивне, оскільки разом з парами $<x, y>$ і $<y, z>$ є пара $<x, z>$. Наприклад, разом з парами $<1, 2>$, і $<2, 3>$ є пара $<1, 3>$.

Отже, відношення ρ є відношенням еквівалентності.

Відношення не є антисиметричним. Наприклад, $<1, 2> \in \rho$, і $<2, 1> \in \rho$, але $1 \neq 2$.

б) Це відношення рефлексія, оскільки кожен живе в одному місті сам із собою.

Відношення ρ симетричне, оскільки якщо x живе в одному місті з y, то y живе в одному місті з x.

Відношення ρ транзитивне, оскільки якщо x живе в одному місті з y, а y живе в одному місті із z, то x живе в одному місті із z.

Отже, відношення ρ є відношенням еквівалентності.

Відношення не є антисиметричним, оскільки з xRy і yRx не випливає, що x=y.

Приклад 5.2. На множині прямих на площині розглянемо відношення паралельності прямих. Чи буде це відношення відношенням еквівалентності?

Розв'язання

Нехай a, b, c – паралельні прямі на площині.

a) $\forall a$; $a \| a$ – рефлексивне;

b) $\forall a,b$; $a \| b \Rightarrow b \| a$ – симетричне;

c) $\forall a,b,c$; $a \| b, b \| c \Rightarrow a \| c$ – транзитивне,

отже, еквівалентне.

Приклад 5.3. Побудувати матрицю R «навчаються в одній групі» на множині здобувачів M = {І, П, С, К, З, Я}, якщо відомо, що І, С, З навчаються в групі КІС, а П, К, Я – у СУА. Чи є це відношення відношенням еквівалентності?

Розв'язання

Побудуємо матрицю відношення R:

	И	П	С	К	З	Я
И	1	0	1	0	1	0
П	0	1	0	1	0	1
С	1	0	1	0	1	0
К	0	1	0	1	0	1
З	1	0	1	0	1	0
Я	0	1	0	1	0	1

Відношення рефлексивне, оскільки по головній діагоналі стоять тільки одиниці. Відношення симетричне, оскільки матриця симетрична щодо головної діагоналі. Відношення транзитивне, оскільки aRb, bRc $\Rightarrow$ aRc, $\forall a, b, c \in M$.

Отже, еквівалентне.

Приклад 5.4. Перевірити, чи є бінарне відношення R={(b,d), (a,e), (a,b), (a, d), (c,d), (b,e), (a,c)} відношенням часткового порядку на множині A={a, b, c, d, e}.

Розв'язання

Відношення R є рефлексивним. Перевіримо, чи є воно антисиметричним. Визначимо обернене йому відношення:

R^{-1} ={(d,b), (e,a), (b,a), (d,a), (d,c), (e,b), (c,a)}.

Тоді $R \cap R^{-1} = I_A$, а, отже, відношення R є антисиметричним.

Для перевірки транзитивності визначимо другу степінь відношення R:

R^2 = ={(a a), (a b), (a c), (a d), (a e), (b b), (b d), (b e), (c c), (c d), (d d), (e e)}=R. Тому відношення R є транзитивним.

Отже, відношення R є відношенням часткового порядку.

Приклад 5.5. Виявити серед наданих відношень функції:

а) f = {<1, 2>, <2, 3>, <3, 4>, <4, 2>} – функція.

б) f^{-1} = {<2, 1>, <3, 2>, <4, 3>, <2, 4>} – не є функція.

в) g = {<1, *a*>, <2, *b*>, <3, *c*>, <4, *d*>} – функція.

г) g^{-1} = {<*a*, 1>, <*b*, 2>, <*c*, 3>, <*d*, 4>} – функція.

Задачі для самостійного розв'язання

Виконати індивідуальне завдання відповідно до табл. 5.1, номер варіанта відповідає номеру прізвища здобувача у списку.

Таблиця 5.1 – Індивідуальні завдання

Варіант	**№ завдання**
1, 10, 19	1 (а), 2 (а)
2, 11, 20	1 (б), 2 (б)
3, 12, 21	1 (в), 2 (в)
4, 13, 22	1 (г), 2 (г)
5, 14, 23	1 (д), 2 (д)
6, 15, 24	1 (е), 2 (е)
7, 16, 25	1 (ж), 2 (ж)
8, 17, 26	1 (з), 2 (з)
9, 18, 27	1 (і), 2 (і)

Завдання

1. Визначити, які з таких бінарних відношень є відношеннями еквівалентності:

а) перпендикулярність площин у просторі;

б) відношення «бути однакового зросту» на множині людей;

в) відношення «знаходитися один від одного на відстані, не меншій ніж 100 м»;

г) відношення «бути родичем» на множині людей (уважаємо, що людина є родичем сама собі, а дві людини є родичами, якщо одна з них є нащадком іншої, або вони мають спільного предка);

д) відношення «навчатися в одній групі»;

е) відношення «бути старшим»;

ж) відношення «бути сином»;

з) відношення «бути начальником»;

и) відношення «*B* ділиться на *A* без остачі».

2. Задане бінарне відношення на множині M = {1, 2, 3, 4}. Чи є воно рефлексивним, симетричним, антисиметричним, транзитивним, еквівалентним? Чому?

а) R={(1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (3,3), (4,1), (4,4)};

б) R={(1,1), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,3), (4,4)};

в) R={(1,1), (1,4), (2,3), (3,2), (4,1)};

г) R={(1,1), (1,2), (1,4), (2,2), (2,3), (3,3), (4,4)};

д) R={(1,1), (1,3), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)};

е) R={(1,1), (1,2), (3,1), (3,2), (3,3), (4,4)};

ж) R={(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,4), (4,4)};

з) R={(1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3), (4,3)};

і) R={(1,4), (2,3), (3,2), (3,4), (4,1), (4,3)}.

Контрольні питання

1. Які властивості відношень вам відомі? Надайте їх визначення.
2. Головна діагональ матриці якого відношення містить тільки одиниці?
3. Для якого відношення ρ завжди виконується умова $\rho = \rho^{-1}$?
4. Для якого відношення ρ завжди виконується умова $\rho \circ \rho \subseteq \rho$?
5. Що таке функція, функціональні відношення?
6. Укажіть способи задання функцій.
7. Яке з таких тверджень справедливо:

а) усяке бінарне відношення є функція;

б) усяка функція є бінарним відношенням?

8. Які відношення порядку вам відомі? Надайте їх визначення.

Література: [1–6, 9].

2 КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ЗНАНЬ ЗДОБУВАЧІВ

Перелік практичних робіт з навчальної дисципліни «Дискретна математика» складається з 15 робіт, які спрямовані на перевірку знань здобувачів з теорії та практики розв’язання прикладних задач.

Виконання практичних робіт є обов’язковим для всіх здобувачів. За роботу на практичних заняттях можна отримати 15 балів. Також обов’язковим є написання розрахунково-графічної роботи та проходження тесту з кожного змістового модуля курсу.

Розподіл балів, що отримують здобувачі за видами занять, наведено в табл. 2.1.

Таблиця 2.1 – Розподіл балів за видами занять

Критерії оцінювання		
Вид роботи	Зміст	Бали
Робота на лекціях	Активна участь у дискусіях, розгляд практичних кейсів, ведення конспекту	10
Робота на практичних заняттях, виконання завдань, відповіді на питання	ПР 1 Поняття множини, основні операції над множинами. Поняття впорядкованої множини, прямий добуток множин. Кортежі	1
	ПР 2 Властивості операцій над множинами	1
	ПР 3 Поняття відношення, способи задання відношень. Властивості відношень. Функціональні відношення	1
	ПР 4 Реляційна модель даних. Операції реляційної алгебри	1
	ПР 5 Основні означення в теорії графів. Способи подання графів. Планарні графи. Ейлерові графи	1
	ПР 6–7 Дерева. Властивості дерев. Алгоритм Борувки. Пошук кістякового дерева мінімальної ваги. Алгоритм Краскала і Пріма	2
	ПР 8 Задача знаходження найкоротшого шляху на графі	1
	ПР 9 Паросполучення. Задача вибору або задача про призначення	1
	ПР 10 Транспортна мережа. Задача про максимальний потік у транспортній мережі	1
	ПР 11 Задача знаходження найкоротшого гамільтонового контуру	1
	ПР 12 Основні логічні операції, властивості операцій, принцип двоїстості, принцип суперпозиції, типи булевих функцій	1
	ПР 13 Нормальні форми логічних функцій, досконалі форми логічних функцій, властивості досконалих форм. Булевоподібні алгебри	1
	ПР 14–15 Методи мінімізації булевих функцій. Побудова комбінаційних схем	2
Контроль	Тестування за змістовим модулем 1	5
	Тестування за змістовим модулем 2	5
	Тестування за змістовим модулем 3	5
	Контрольна робота 1	8
	Контрольна робота 2	8
	Контрольна робота 3	8
	Розрахунково-графічна робота	16
	Іспит	20
	Усього балів	**100**

Шкала оцінювання: національна та ECTS

Сума балів за 100-бальною шкалою	Оцінка в ECTS	Значення оцінки ECTS	Критерії оцінювання	Рівень компетентності	Оцінка за національною шкалою (іспит, диф. залік)
90–100	A	відмінно	Здобувач виявляє особливі творчі здібності, уміє самостійно здобувати знання, без допомоги викладача знаходить та опрацьовує необхідну інформацію, уміє використовувати набуті знання й уміння для прийняття рішень у нестандартних ситуаціях, переконливо аргументує відповіді, самостійно розкриває власні обдарування й нахили	Високий (творчий)	відмінно
82–89	B	дуже добре	Здобувач вільно володіє вивченим обсягом матеріалу, застосовує його на практиці, вільно розв'язує вправи і завдання у стандартних ситуаціях, самостійно виправляє допущені помилки, кількість яких незначна	Достатній (конструк-тивно-варіативний)	добре
74–81	C	добре	Здобувач уміє зіставляти, узагальнювати, систематизувати інформацію під керівництвом викладача; у цілому самостійно застосовувати її на практиці; контролювати власну діяльність; виправляти помилки, серед яких є суттєві, добирати аргументи для підтвердження думок		
64–73	D	задовільно	Здобувач відтворює значну частину теоретичного матеріалу, виявляє знання й розуміння основних положень; за допомогою викладача може аналізувати навчальний матеріал, виправляти помилки, серед яких є значна кількість суттєвих	Середній (репродук-тивний)	задовільно
60–63	E	достатньо	Здобувач володіє навчальним матеріалом на рівні, вищому за початковий, значну частину його відтворює на репродуктивному рівні		
35–59	FX	незадовільно з можливістю повторного складання семестрового контролю	Здобувач володіє матеріалом на рівні окремих фрагментів, що становлять незначну частину навчального матеріалу	Низький (рецептивно-продуктивний)	незадовільно
1–34	F	незадовільно з обов'язковим повторним вивченням залікового кредиту	Здобувач володіє матеріалом на рівні елементарного розпізнання й відтворення окремих фактів, елементів, об'єктів		

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. Сергієнко А. М., Молчанова А. А., Романкевич В. О. Комп'ютерна дискретна математика: навчальний посібник. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 189 с.

2. Ємець О. О., Парфьонова Т. О. Дискретна математика: навчальний посібник. Полтава: ПУЕТ, 2022. 282 с.

3. Балога С. І. Дискретна математика: навчальний посібник. Ужгород: ПП «АУТДОРШАРК», 2021. 124 с.

4. Бондаренко М. Ф., Білоус Н. В., Руткас А. Г. Комп'ютерна дискретна математика. Харків: СМІТ, 2004. 480 с.

5. Борисенко О. А. Дискретна математика: підручник. Суми: Університетська книга, 2007. 255 с.

6. Ядренко М. Й. Дискретна математика: навчальний посібник. Київ: Експрес, 2003. 244 с.

Додаткова

7. Oksanych I., Lutsenko I., Koval S., Shevchenko I. Optimization of resource-intensive dynamic systems with a continuous supply of raw materials according to the criterion of minimum use of reserves. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies.* 2022. Vol. 1, Iss. 4 (115). P. 20–28.

8. Oksanych I., Lutsenko I., Shevchenko I., Karabut N. Development of the method for modeling operational processes for tasks related to decision making. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. Vol. 2, Iss. 4 (92). P. 26–32.

9. Oksanych I., Lutsenko L., Koval S., Rylova N. Modeling a convertor-class interactive system. *2019 IEEE 39th International Conference on Electronics and nanotechnology*. Kyiv, Ukraine. P. 46–50.

10. Оксанич І., Тараканова Н. Методика пошуку особливих шляхів мережевих графіків. *Results of modern scientific research and development*: X International Scientific and practical conference (12–14 грудня 2021 р., Мадрид, Іспанія). С. 215–219.

11. Трохимчук Р. М., Нікітченко М. С. Дискретна математика у прикладах і задачах. URL: http://csc.knu.ua/media/filer_public/89/10/89101127-5400-4d61-9840-7eab32caddab/discrete_mathematics.pdf (дата звернення 24.06.2024).

12. Коноваленко О. Є., Ткачук М. А., Грабовський А. В. Дискретна математика: навчально-методичний посібник. Харків: НТУ «ХПІ», 2016. 84 с. URL: посилання (дата звернення 24.06.2024).

13. Олійник Л. О. Дискретна математика: навчальний посібник. Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2015. 256 с. URL: http://www.dstu.dp.ua/Portal/Data/3/17/3-17-b2.pdf (дата звернення 24.06.2024).

Інформаційні ресурси

14. Теорія множин. URL: https://www.youtube.com/watch?v=cvzv2xRxt58&ab_channel=КафедраММЗІ (дата звернення 24.06.2024).

15. Теорія графів – просто про складне. URL: https://www.youtube.com/watch?v=kM-RoXX-wvQ (дата звернення 24.06.2024).

16. Теорія відношень. URL: https://www.youtube.com/watch?v=VqC4eDGu1wg&ab_channel=КафедраММЗІ (дата звернення 24.06.2024).

17. Клесов О. І., Грегуль Ю. О. Відеокурс «Дискретна математика». URL: https://matan.kpi.ua/uk/videokurs-discret-math.html (дата звернення 24.06.2024).

Методичні вказівки щодо виконання практичних робіт з навчальної дисципліни «Дискретна математика» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня денної форми навчання зі спеціальності 123 – «Комп'ютерна інженерія» освітньо-професійної програми «Комп'ютерна інженерія» (частина 1)

Укладач д. т. н., проф. І. Г. Оксанич
Відповідальний за випуск к. т. н., доц. Н. М. Істоміна

Підп. до др. _____. Формат 60×84 1/16. Папір тип. Друк ризографія.
Ум. друк. арк. _____. Наклад _____ прим. Зам. № _____. Безкоштовно.

Редакційно-видавничий відділ
Кременчуцького національного університету
імені Михайла Остроградського
вул. Університетська, 20, м. Кременчук, 39600