МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ ЕЛЕКТРИЧНОЇ ІНЖЕНЕРІЇ
ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ЩОДО ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНИХ І САМОСТІЙНОЇ РОБІТ З
НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

«ІМОВІРНІСНО-СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ»

ДЛЯ СТУДЕНТІВ ДЕННОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ ЗІ СПЕЦІАЛЬНОСТІ
123 – «КОМП’ЮТЕРНА ІНЖЕНЕРІЯ»
ОСВІТНЬО-ПРОФЕСІЙНОЇ ПРОГРАМИ
«КОМП’ЮТЕРНА ІНЖЕНЕРІЯ»
ОСВІТНЬОГО СТУПЕНЯ «БАКАЛАВР»
(ЧАСТИНА 1)

КРЕМЕНЧУК 2024

Методичні вказівки щодо виконання практичних і самостійної робіт студентів з навчальної дисципліни «Імовірнісно-статистичні методи інформаційних технологій» для студентів денної форми навчання зі спеціальності 123 – «Комп'ютерна інженерія» освітньо-професійної програми «Комп'ютерна інженерія» освітнього ступеня «Бакалавр» (частина 1)

Укладач к. т. н., доц. В. М. Сидоренко
Рецензент д. т. н., проф. М. І. Гученко

Кафедра комп'ютерної інженерії та електроніки

Затверджено методичною радою Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського
Протокол 5 від 23 02 2024 р.
Голова методичної ради проф. В. В. Костін

ЗМІСТ

ВСТУП

Навчальна дисципліна «Імовірнісно-статистичні методи інформаційних технологій» належить до циклу навчальних дисциплін математичної підготовки бакалаврської програми.

Мета практичних занять – узагальнити знання та навички, набуті під час опрацювання лекційного матеріалу та змістового модуля 1 «Теорія ймовірностей та ймовірнісні процеси» і навчитися розв’язувати відповідні задачі.

Методичні вказівки для студентів уміщують короткі теоретичні відомості, приклади розв’язування задач, вимоги щодо оформлення звіту індивідуальних завдань до теми «Випадкові події та їх аналіз».

Метою навчальної дисципліни є набуття студентами професійних компетенцій в галузі ймовірнісно-статистичних методів і підготовка студентів до ефективного їх використання в навчальному процесі, подальшій інженерній та науковій діяльності.

Завданням навчальної дисципліни є набуття знань закономірностей випадкових явищ і вміння використовувати ймовірнісно-статистичні методи для аналізу, моделювання та проектування апаратних і програмних складових комп’ютерних систем.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

отримати досвід з таки компетентностей.

ЗК 1. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

ЗК 2. Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями.

ЗК 3. Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.

ЗК 7. Уміння виявляти, ставити та розв’язувати проблеми.

Набути таких навичок та умінь:

ПРН 1. Знати і розуміти наукові положення, на яких ґрунтується функціонування комп’ютерних засобів, систем та мереж.

ПРН 2. Мати навички проведення експериментів, збирання даних та моделювання в комп'ютерних системах.

ПРН 6. Уміти застосовувати знання для ідентифікації, формулювання і розв'язування технічних задач спеціальності, використовуючи методи, що є найбільш придатними для досягнення поставлених цілей.

ПРН 7. Уміти розв'язувати задачі аналізу та синтезу засобів, характерних для спеціальності.

ПРН 8. Уміти системно мислити та застосовувати творчі здібності до формування нових ідей.

ПРН 11. Уміти здійснювати пошук інформації в різних джерелах для розв'язання задач комп'ютерної інженерії.

ПРН 14. Уміти поєднувати теорію і практику, а також приймати рішення та виробляти стратегію діяльності для розв'язання завдань спеціальності з урахуванням загальнолюдських цінностей, суспільних, державних і виробничих інтересів.

ПРН 17. Спілкуватись усно та письмово з професійних питань українською мовою та однією з іноземних мов (англійською, німецькою, італійською, французькою, іспанською).

ПРН 18. Використовувати інформаційні технології для ефективного спілкування на професійному та соціальному рівнях.

ПРН 20. Усвідомлювати необхідність навчання упродовж усього життя з метою поглиблення набутих і здобуття нових фахових знань, удосконалення креативного мислення.

ПРН 21. Якісно виконувати роботу та досягати поставленої мети з дотриманням вимог професійної етики.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студент повинен

знати:

– опис випадкових подій та їх аналіз;

– випадкові величини, системи і функції випадкових величин;

– математичний апарат опису і моделювання випадкових процесів та основи теорії СМО;

– основи вибіркового методу, точкові та інтервальні оцінки параметрів розподілу випадкових величин;

– основи теорії перевірки статистичних гіпотез;

– основи дисперсійного, кореляційного та регресійного аналізу;

уміти:

– обчислювати ймовірності випадкових величин з використанням комбінаторних формул;

– користуватися теоремами додавання та множення ймовірностей, формулами повної ймовірності та Байєса;

– обчислювати числові та функціональні характеристики випадкових величин;

– розв'язувати типові задачі теорії випадкових процесів, зокрема із застосуванням теорії СМО;

– реалізовувати задачі вибіркового методу та будувати моделі випадкових процесів для розв'язування задач статистичної обробки даних і побудови прогнозних моделей засобами спеціалізованої мови програмування R у середовищі RStudio;

– створювати проєкти з обробки та аналізу статистичних даних у середовищі RStudio за допомогою видавничої системи Quarto з використанням мов розмітки Markdown і LaTeX під контролем СКВ Git та розміщувати результати проєкту на GitHub.

1 ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ ЗВІТІВ ПРО ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНИХ РОБІТ

Звіт про виконання практичних робіт має бути написаний студентом від руки розбірливим почерком у зошиті в клітинку чи на комп'ютері шрифтом Times New Roman, розміром 14 пунктів на одному боці аркуша, через півтора інтервали. Відстань між попереднім текстом і заголовком має бути два інтервали, а відстань між заголовком і наступним текстом – у півтора рази більше, ніж міжрядковий проміжок звичайного тексту. Після заголовка на сторінці має бути хоча б один рядок тексту.

Зміст звіту

За підсумками кожної практичної роботи студент оформлює індивідуальний звіт, що містить:

– титульну сторінку;

– тему роботи;

– постановку завдання;

– розв'язання задачі згідно зі своїм варіантом;

– отримані результати;

– відповіді на контрольні питання.

2 ПЕРЕЛІК ПРАКТИЧНИХ РОБІТ

Практична робота № 1

Тема. Елементи комбінаторики

Мета: набути практичних навичок у розв'язанні задач з комбінаторики.

Короткі теоретичні відомості

Головні визначення і формули

Кількість шансів – це кількість можливих результатів будь-якої дії (монетка, кубик, карти, тощо) або кількість способів зробити цю дію.

Теорема про перемноження шансів

Теорема. Нехай є $k, k \in N$, груп елементів, причому i-та група містить n_i елементів, $1 \le i \le k$. Виберемо з кожної групи по одному елементу. Тоді загальна кількість N способів, якими можна зробити такий вибір, дорівнює

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k . \qquad (1.1)$$

Приклад 1.1. У одного студента 5 книг, у іншого – 9. Усі книги різні. Скількома способами студенти можуть провести обмін однієї книгм на одну книгу?

Розв'язання. Спочатку розглянемо, яким чином перший студент може вибрати одну книгу з п'яти. Це можна зробити п'ятьма способами. Водночас другий студент може це зробити дев'ятьма способами. Тоді скориставшись формулою (1.1) можна записати: $5 \times 9 = 45$. Тобто, студенти можуть провести обмін однієї книги на одну книгу 45 різними способами.

Урни та кульки

Маємо урну, що містить n занумерованих кульок. Ми вибираємо k кульок. Скількома способами можна вибрати k кульок з n?

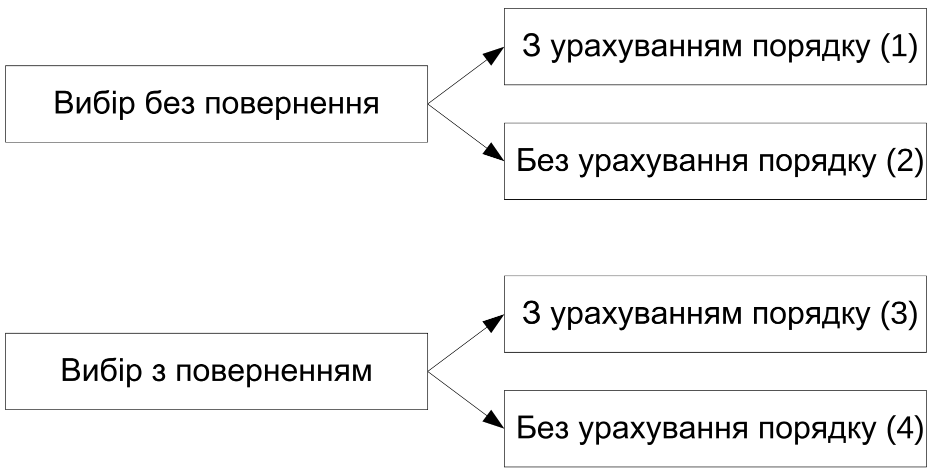


Рисунок 1.1 – Чотири схеми відбору

Теорема. Загальна кількість вибірок у схемі вибору k елементів з n без повернення та з урахуванням порядку визначається за формулою

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}, \tag{1.2}$$

де $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ і називається *кількістю розміщень* з n елементів по k елементів.

Приклад 1.2. 10 спортсменів розіграють одну золоту, одну срібну та одну бронзову медалі. Скількома способами ці медалі можуть бути розподілені між спортсменами?

Розв'язання. Ураховуючи, що медалі під час розподілу не можуть повторюватися і порядок має значення, скористаємося формулою (1.2) і запишемо: $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. Отже, медалі можуть бути розподілені між спортсменами 720 різними способами.

Теорема. Загальна кількість вибірок у схемі вибору k елементів з n без повернення та без урахування порядку визначається формулою:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{1.3}$$

і називається *кількістю поєднань* з n елементів по k елементів.

Приклад 1.3. У одного студента є п'ять книг, у іншого – дев'ять. Усі книги різні. Скількома способами студенти можуть провести обмін трьох книг на три книги?

Розв'язання. Ураховуючи, що повторення неможливі, а порядок під час відбору не має значення, скористаємося формулою (1.3) і запишемо кількість способів, якими перший студент може відібрати три книги з п'яти: C_5^3. Кількість способів, якими цю дію може зробити другий дорівнює відповідно C_9^3. Тоді за формулою (1.1) розв'язок задачі становитиме $C_5^3 \cdot C_9^3 = 10 \cdot 84 = 840$.

Отже, студенти можуть провести обмін трьох книг на три книги 840 різними способами.

Теорема. Загальна кількість вибірок у схемі вибору k елементів з n з поверненням і з урахуванням порядку визначається формулою:

$$n^k = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k} = n^k . \tag{1.4}$$

Приклад 1.4. Скільки тризначних чисел можливо створити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 якщо кожна цифра може входити у число більше, ніж один раз?

Розв'язання. У цьому випадку цифри відбираються з поверненням, але з урахуванням порядку. Отже, для розв'язання задачі можна скористатися формулою (1.4): $7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$.

Теорема. Загальна кількість вибірок у схемі вибору k елементів з n з поверненням і без урахуванням порядку визначається за формулою

$$C_{n+k-1}^{k} = C_{n+k-1}^{n-1}. \tag{1.5}$$

Приклад 1.5. Знайти кількість можливих результатів підкидання двох гральних кісток, якщо кістки вважаються нерозрізненими.

Розв'язання. Враховуючи, що гральні кістки не розрізнюються і значення очок можуть дублюватися на обох кістках, розв'язання задачі можна звести до комбінаторної схеми вибору з повтореннями без урахування порядку і скористатися формулою (1.5). Отже, отримаємо $C_{6+2-1}^{2} = C_7^2 = 21$ можливий результат, який може випасти на двох кістках.

Задачі для самостійного розв'язання

Виконати індивідуальне завдання. Завдання полягає у розв'язанні п'яти задач, які потрібно вибрати зі списку, наведеного нижче. Правило вибору номерів таке: $n, n+1, n+2, n+3, n+4$, де n – номер студента в списку групи. У разі, якщо було досягнуто кінця списку задач, потрібно циклічно повернутися до його початку.

Завдання

1. Скільки словників потрібно видати, щоб можливо було безпосередньо виконати переклади з будь-якої з п'яти мов: російської, англійської, французької, німецької, італійської – будь-якою з цих п'яти мов?

2. Скількома способами на шаховій дошці можливо вказати:

а) 2 клітинки?

б) 2 клітинки одного кольору?

в) 2 клітинки різного кольору?

3. Із цифр 1, 2, 3, 4, 5 складаються будь-які можливі числа, кожне з яких складається не більш ніж із 3 цифр. Скільки можливо скласти таких цифр, якщо:

а) повторення цифр в числах не дозволяється;

б) дозволяється повторення чисел?

4. У групі 9 людей. Скільки різних підгруп можливо створити за умови, що в підгрупі має бути не менше, ніж дві людини?

5. Скількома способами можливо розташувати на полиці 7 різних книг, якщо:

а) 2 певні книги повинні стояти поряд;

б) ці дві книги не повинні стояти поряд?

6. Групу з 20 студентів потрібно розділити на 3 бригади, за умови, що в першу бригаду повинні входити 3 людини, в другу – 5 і в третю – 12. Скількома способами це можливо виконати?

7. Скільки шестизначних чисел можливо створити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, якщо кожне число повинно складатися з трьох парних и трьох непарних цифр, причому жодна цифра не входить у число більше, ніж один раз?

8. Скільки різних чисел можливо отримати, переставляючи числа 2 233 344 455?

9*. (Задача Д. Ільченко). Є 1000 доменів, на кожному з яких повинен бути набір з шести блоків контенту, кожен набір повинен відрізнятися двома блоками від будь-якого іншого. Скільки необхідно всього унікальних блоків, щоб задовольнити таку умову?

10. У пасажирському потязі 9 вагонів. Скількома способами можливо розсадити в потязі чотирьох людей за умови, що всі вони повинні їхати в різних вагонах?

11. На колі вибрано 10 точок.

а) Скільки можливо провести хорд з кінцями в цих точках?

б) Скільки існує трикутників з вершинами в цих точках?

12. Доведіть тотожність

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k.$$

13. Протягом чотирьох тижнів студенти здають 4 іспити, у тому числі і 2 іспити з математики. Скількома способами можливо розподілити іспити по тижнях так, щоб іспити з математики не відбувалися один за одним?

14. 8 людей повинні сісти в 2 автомобілі, притому в кожному повинно бути щонайменше 3 людини. Скількома способами вони це можуть зробити?

15. Знайдіть кількість можливих «слів» з літер слова «зоологія». Скільки таких слів, в які містять 3 літери «о», розташовані поряд?

16. Маємо 20 найменувань товару. Скількома способами їх можна розподілити по трьох магазинах, якщо відомо, що в перший магазин має бути доставлено 8 найменувань, у другий – 7 найменувань і в третій – 5 найменувань товару?

17. (Від EPAM University, 2022) Емма хоче купити сонячні окуляри. У магазині окулярів є такий вибір: купити готові сонячні окуляри, або замовити, скомбінувавши оправу з лінзами. Для створення власної моделі Емма має вибір із двох оправ і двох брендів лінз, кожен з яких пропонує чотири види лінз. Серед готових окулярів є п’ять доступних моделей. Скільки всього варіантів придбати окуляри є для Емми?

Контрольні питання

1. Що вивчає комбінаторика?

2. Що таке класична урнова схема і яке значення вона має для комбінаторики?

3. Що таке перестановка і як знаходити їх кількість для заданої множини елементів?

4. Яка кількість розміщень можлива для k елементів у множині з n елементів?

5. Як визначити кількість способів вибору k елементів із множини, де порядок не має значення?

Література: [2, стор. 5–7, 11, стор. 16-18]

Практична робота № 2

Тема. Класичне визначення ймовірності. Застосування комбінаторики для розрахунку ймовірностей.

Мета: набути практичних навичок розв’язання задач з підрахунку ймовірностей на підставі класичного визначення з використанням формул комбінаторики.

Короткі теоретичні відомості

Класичне визначення ймовірності

Нехай $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$. Припустимо, що всі елементарні події рівноможливі, тобто $p(\omega_i) = \dfrac{1}{n}$ для $\forall i = \overline{1, n}$. Якщо подія A складається з k рівноможливих подій, $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, ..., \omega_{i_k}\}$, то $p(A) = p(\omega_{i_1}) + p(\omega_{i_2}) + ... + p(\omega_{i_k}) = k \cdot \dfrac{1}{n} = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$, де символом $|A|$ позначено кількість елементів скінченної множини A.

Визначення. Нехай $|A| = k$ кількість елементарних подій, що сприяють події A. $|\Omega| = n$ – скінченна кількість усіх рівноможливих подій, тоді ймовірність будь-якої події A обчислюється за формулою:

$$p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{k}{n}. \quad (2.1)$$

Ця формула читається так: «ймовірність події A дорівнює відношенню кількості подій, що сприяють події A, до загальної кількості подій».

Приклад 2.1. В урні є 10 куль, з яких 3 білі і 7 чорних. Яка ймовірність того, що навмання витягнута куля з цієї урни виявиться білою?

Розв'язання. Нехай подія A полягає в тому, що витягнута куля виявляється білою. Цей іспит має 10 рівноймовірних результатів, із яких для події A є сприятливими три. Отже, $p(A) = \frac{3}{10}$.

Приклад 2.2. Із 5 літер абетки складено слово «книга». Дитина, яка не вміє читати, розсипала літери цього слова випадково. Знайти ймовірність того, що буде знову отримано слово «книга».

Розв'язання. Один з можливих способів розв'язання задачі такий. Нехай подія A полягає в тому, що ми знову отримаємо слово «книга». Кількість усіх можливих «слів», які можуть утворитися при падінні дорівнює 5!, але тільки один шанс сприяє тому, що випаде слово «кига». Тоді згідно з класичним визначенням ймовірності: $p(A) = \frac{k}{n} = \frac{1}{5!}$.

Приклад 2.3. В урні лежать 45 куль, серед яких 6 білих. Витягуються 3 кулі без повернення. Визначити ймовірність витягування трьох білих куль.

Розв'язання. Позначимо шукану подію як A, а відповідну ймовірність – $p(A)$. Згідно з класичним визначенням ймовірності $p(A) = \frac{k}{n}$, де у контексті задачі k – кількість елементарних подій, що сприяють події A, а n – кількість усіх рівноможливих способів витягнути 6 куль із 45 без повернення і без урахування порядку. Отже, $n = C_{45}^{3}$. Водночас k дорівнюватиме кількості всіх способів, якими можна вилучити 3 білі кулі з шести білих «і» в комбінації з усіма можливими способами, якими можна відібрати 3 чорні кулі з 39 чорних: $k = C_6^3 \cdot C_{42}^3$, Отже, розв'язання задачі матиме такий вигляд: $p(A) = \frac{C_6^3 \cdot C_{39}^3}{C_{45}^6} \approx 0{,}03484$.

Задачі для самостійного розв'язання

Виконати індивідуальне завдання. Завдання полягає у розв'язанні п'яти задач, які потрібно вибрати зі списку, наведеного нижче. Правило вибору номерів таке: $n, n+1, n+2, n+3, n+4$, де n – номер студента у списку групи. У разі, якщо було досягнуто кінця списку задач, потрібно циклічно повернутися до його початку.

Завдання

1. Сервер працює в мультирежимі і за деякий час обробляє 15 задач клієнтів першої групи і 5 задач – другої. Визначити ймовірність того, що за деякий час буде обслуговано *7* задач першої групи і *3* задачі другої.

2. Куб, усі грані якого пофарбовані, розрізано на 1000 кубиків однакового розміру, які потім були ретельно перемішані. Знайти ймовірність того, що навмання витягнутий кубик матиме пофарбованих граней: а) одну; б) дві; в) три.

3. N людей навмання було розміщено за круглим столом (N>*2*). Знайти ймовірність p того, що дві фіксовані людини A та B сидітимуть поруч.

4. Наугад вибирається тризначне число, у десятковому записі якого немає 0. Знайти ймовірність того, що у вибраного числа рівно 2 однакові цифри.

5. Власник однієї карточки лотереї «Спортлото» (6 із 49) закреслює 6 номерів. Яка ймовірність того, що він угадає: а) усі 6 номерів у наступному тиражі; б) 5 чи 6 номерів; в) хоча б один номер; г) рівно 2 номери; д) не менше, ніж чотири номери.

6. Навмання вибрано натуральне число, що не перевищує 20. Яка ймовірність того, що це число кратне 5.

7. Дано три відрізки довжиною 2, 5, 6, 10. Яка ймовірність того, що з трьох навмання взятих відрізків можна побудувати трикутник.

8. В урні є 4 білі та 2 чорні кульки. Із цієї урни навмання взято 2 кульки. Знайти ймовірність того, що вони різного кольору.

9. У групі 30 студентів, з яких 10 відмінників. Групу навмання розділено на 2 частини. Знайти ймовірність того, що в кожній частині по 5 відмінників.

10. У каталозі є 7 командних файлів і 4 текстові файли. Випадково було знищено 6 файлів. Яка ймовірність того, що було знищено 3 командні і 3 текстові файли?

11. Навмання вибирається по одній букві зі слів «дама» та «мама». Знайти ймовірність того, що ці букви: а) однакові; б) різні.

12. Навмання вибрано натуральне число, що не перевищує 20. Яка ймовірність того, що це число є дільником 20.

13. На шести однакових картках написані літери «к», «р», «е», «м», «е», «н», «ч», «у», «к». Картки навмання розкладені в ряд. Яка ймовірність того, що буде складено слово «Кременчук»?

14. У ящику 12 мікросхем першого виду і 8 мікросхем другого виду. Вміст ящика ділиться на дві частини по 10 мікросхем у кожній. Визначити ймовірність того, що в цій частині знаходиться 6 мікросхем першого і 4 мікросхеми другого виду.

15. В урні 6 білих та 4 чорні кульки. З цієї урни навмання взято 5 кульок. Знайти ймовірність того, що 2 з них білі, а 3 – чорні.

16. В урні 10 кульок, із яких 2 білі, 3 чорні та 5 синіх. Навмання взято 3 кульки. Знайти ймовірність того, що всі 3 кульки різного кольору.

17. На 10 картках написані літери «а», «а», «а», «м», «м», «т», «т» , «е», «и», «к». Картки ретельно перемішано та викладено у ряд. Знайти ймовірність того, що отримаємо слово «математика».

18. На п'ятимісну лавку випадково сідають 5 людей. Знайти ймовірність того, що певні 3 людини будуть сидіти поруч.

19. В урні 10 кульок. Ймовірність того, що 2 взяті кульки будуть білими, складає $\frac{2}{15}$. Скільки в урні білих кульок?

20. Кинуто 3 гральні кістки. Знайти ймовірність того, що на всіх кістках випаде парне число.

21. Локальна мережа може обслуговувати 13 комп'ютерів у першому приміщенні та 17 комп'ютерів у другому, комп'ютери включаються в роботу

незалежно від інших. У деякий момент часу в мережі працювало 10 комп'ютерів. Визначити ймовірність того, що з них 7 комп'ютерів працювало в першому приміщенні і 3 в другому.

Контрольні питання

1. Надати визначення класичної ймовірності.

2. Що таке експеримент і простір подій у рамках теорії ймовірностей?

3. Яким чином комбінаторику використовують для розрахунку ймовірностей за класичним методом?

4. У чому полягає принципова відмінність класичного визначення ймовірності від ймовірності на просторі елементарних подій?

5. Наведіть інший спосіб розв'язання задачі з прикладу 2.2.

Література: [2, стор. 6–13, 11, стор. 11-14]

Практична робота № 3

Тема. Геометрична ймовірність. Аксіоматичне визначення ймовірності. Теореми множення та додавання ймовірностей. Формула повної ймовірності та формула Байєса.

Мета: набути практичних навичок у розв'язанні задач з підрахунку ймовірностей на підставі геометричного визначення ймовірності, алгебри подій та теорем множення і додавання ймовірностей; навчитися застосовувати на практиці формули повної ймовірності та Байєса.

Короткі теоретичні відомості

Властивості ймовірності, що витікають з аксіом

1. $0 \le p(A) \le 1$.

2. $p(\Omega) = 1$.

3. $p(\varnothing) = 0$.

4. $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

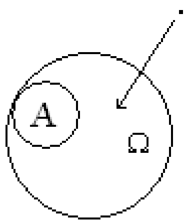
5. Якщо A та B несумісні, то $p(A+B) = p(A) + p(B)$.

6. У загальному ж випадку $p(A+B)=p(A)+p(B)-p(A\cdot B)$.

7. Якщо $A\subset B$, то $p(A)\le p(B)$.

Геометричне визначення ймовірності

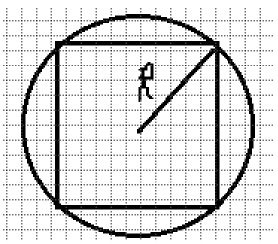
Визначення. Експеримент задовольняє вимогам геометричного визначення ймовірності, якщо його результати можна зобразити точками деякої області Ω у R^m так, що ймовірність попадання точки у $\forall$ частину $A\subset\Omega$ не залежить від форми або розташування A у середині Ω, а залежить лише від міри області A:



$$p(.\in A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}, \qquad (3.1)$$

де $\mu(A)$ – міра області A (довжина, площа, об’єм).

Приклад 3.1. Точку кинуто в коло радіуса *R*. Знайти ймовірність того, що вона влучить у площину вписаного квадрата.



Розв’язання. Знайдемо площу круга та квадрата. Площа круга: $S_{\text{круга}}=\pi\,R^2$. Площа вписаного квадрата: $S_{\text{квадрата}}=2R^2$. Тоді, згідно з (3.1), ймовірність того, що точка влучить у площину вписаного квадрата, дорівнює відношенню площі квадрата до площі круга: $P=\frac{S_{\text{квадрата}}}{S_{\text{круга}}}=\frac{2R^2}{\pi\,R^2}=\frac{2}{\pi}$.

Умовна ймовірність. Теорема добутку ймовірностей

Визначення. Умовною ймовірністю події A, за умови, що відбулася подія B, називається величина $P(A/B)=\frac{p(AB)}{p(B)}$. Визначено тільки для випадку, коли $p(B)>0$.

Теорема. (Теорема добутку ймовірностей). $p(A\cdot B)=p(B)p(A/B)=p(A)p(B/A)$, якщо відповідні умовні ймовірності визначені (тобто $p(A)>0$, $p(B)>0$).

Приклад 3.2. В урні 7 білих і 3 чорних кульки. Навмання витягають дві кульки *без повернення*. Яка ймовірність того, що вони обидві виявилися білого кольору.

Розв'язання. $p(AB) = p(A)p(B/A) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9}$.

Теорема. (Теорема добутку для великої кількості подій). $p(A_1A_2 \ldots A_n) = p(A_1)p(A_2/A_1)p(A_3/A_1A_2) \cdot \ldots \cdot p(A_n/A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1})$, (3.2)

Приклад 3.3. Є коробка з дев'ятьма новими тенісними м'ячами. Для гри беруть 3 м'ячі і після гри кладуть їх назад у коробку. Різниці між м'ячами, що використовувалися у грі, і новими м'ячами немає. Знайти ймовірність того, що після трьох ігор у коробці не залишиться жодного м'яча, що не використовувався у грі.

Розв'язання. $\underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1}_{p(A_1)} \underbrace{\frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7}}_{p(A_2/A_1)} \underbrace{\frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7}}_{p(A_3/A_1A_2)}$.

Визначення. Події A і B називаються *незалежними*, якщо $p(A \cdot B) = p(A)p(B)$.

Приклад 3.4. Розв'язати задачу з прикладу 3.2 за умови, що кульки витягаються з поверненнями.

Розв'язання. $p(AB) = p(A)p(B) = \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10}$.

Визначення. Події $A_1, \ldots, A_n$ називаються *незалежними у сукупності*, якщо для будь-якого набору $1 \le i_1, \ldots, i_k \le n$: $p(A_{i_1} \ldots A_{i_k}) = p(A_{i_1}) \ldots p(A_{i_k})$.

Приклад 3.5. Два стрілки зробили по одному пострілу по мішені. Ймовірність влучення в мішень для першого стрілка складає 0,6, для другого – 0,7. Знайти ймовірність того, що: а) тільки один стрілок влучить у мішень; б) хоча б один стрілок улучить у мішень; в) обидва стрілки влучать у мішень; г) жоден стрілок не влучить у мішень; д) хоча б один стрілок не влучить у мішень.

Розв'язання. Для розв'язання задачі скористаємося базовими властивостями ймовірностей та операціями над ними.

Позначимо ймовірність влучення для першого стрілка як $P(A) = 0.6$ і для другого стрілка як $P(B) = 0.7$.

а) Ймовірність того, що тільки один стрілок влучить у мішень: $P(\text{тільки один влучить}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) + (1 - P(A)) \cdot P(B) = 0.6 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.7$.

б) Ймовірність того, що хоча б один стрілок влучить у мішень:

$P(\text{"хоча б один влучить"}) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0.4 \cdot 0.3$.

в) Ймовірність того, що обидва стрілка влучать у мішень:

$P(\text{"обидва влучать"}) = P(A \cap B) = 0.6 \cdot 0.7$.

г) Ймовірність того, що жоден стрілок не влучить у мішень:

$P(\text{"жоден не влучить"}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.4 \cdot 0.3$.

д) Ймовірність того, що хоча б один стрілок не влучить у мішень:

$P(\text{"хоча б один не влучить"}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.6 \cdot 0.7$.

Формула повної ймовірності

Приклад 3.6. Є 3 заводи, що виробляють однакові мікропроцесори. До того ж, 1-й завод виробляє 25 %, 2-й завод – 35 %, 3-й завод – 40 % всієї продукції. Брак складає 5% від продукції 1-го заводу, 3% від продукції 2-го заводу, 4% від продукції 3-го заводу. Уся продукція змішується і надходить у продаж.

Знайти:

а) ймовірність покупки бракованого кристалу;

б) умовну ймовірність того, що куплений виріб виготовлено 1-м заводом, якщо цей кристал виявився бракованим.

Розв'язання. *Перша ймовірність дорівнює* долі браку в об'ємі всієї продукції, тобто: $0{,}05 \cdot 0{,}25 + 0{,}03 \cdot 0{,}35 + 0{,}04 \cdot 0{,}4$.

Друга ймовірність дорівнює долі 1-го заводу серед всього браку, тобто:

$$\frac{0{,}05 \cdot 0.25}{0{,}05 \cdot 0{,}25 + 0{,}03 \cdot 0{,}35 + 0{,}04 \cdot 0{,}4}.$$

Визначення. Набір попарно несумісних подій $H_1, H_2, \ldots$ таких, що $p(H_i) > 0$, для $\forall i$ $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = \Omega$, називається *повною групою подій.* Події $H_1, H_2, \ldots$ називаються *гіпотезами*.

Теорема. (Формула повної ймовірності). Нехай $H_1, H_2, \ldots$ – повна група подій. Тоді ймовірність будь-якої події A може бути обчислена за формулою:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} p(H_i) \cdot p(A / H_i). \tag{3.3}$$

Формула Байєса

Теорема. Нехай $H_1, H_2, \ldots$ – повна група подій та A – деяка подія позитивної ймовірності. Тоді умовна ймовірність того, що спостерігалася подія H_k, якщо у результаті експерименту спостерігалася подія A, може бути обчислена за формулою:

$$P(H_k / A) = \frac{p(H_k) p(A / H_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} p(H_i) p(A / H_i)}. \tag{3.4}$$

Приклад 3.7. Повернемося до попереднього прикладу.

Розглянемо три гіпотези:

H_1 – 1-й з. $p(H_1) = 0{,}25$

H_2 – 2-й з. $p(H_2) = 0{,}35$

H_3 – 3-й з. $p(H_3) = 0{,}4$.

Нехай $A = \{$виріб виявився бракованим$\}$, тоді:

$P(A / H_1) = 0{,}05$

$P(A / H_2) = 0{,}03$

$P(A / H_3) = 0{,}04$.

Задачі для самостійного розв'язання

Виконати індивідуальне завдання. Завдання полягає у розв'язанні п'яти задач, які потрібно вибрати зі списку, наведеного нижче. Правило вибору номерів такий: $n, n+1, n+2, n+3, n+4$, де n – номер студента у списку групи. У разі, якщо було досягнуто кінця списку задач, потрібно циклічно повернутися до його початку.

Завдання

1. Точку кинуто в коло радіуса R. Знайти ймовірність того, що вона влучить у площину вписаного квадрата.

2. У квадрат з вершинами в точках (0,0), (0,1), (1,1), (1,0) навмання кинуто точку (x,y). Знайти ймовірність того, що координати цієї точки відповідають нерівності $y<2x$.

3. Відстань від пункту А до Б автобус проходить за 2 хвилини, пішохід – за 15 хвилин. Інтервал руху автобусів складає 25 хвилин. Людина підходить у випадковий момент часу до пункту А та рухається у Б пішки. Знайти ймовірність того, що в дорозі її наздожене автобус.

4. На відрізок AB довжиною 12 см навмання ставлять точку M. Знайти ймовірність того, що площа квадрата, що побудований на відрізку AM, буде між 36 $см^2$ та 81 $см^2$.

5. (Задача про зустріч). Дві людини домовилися зустрітись у певному місці між 12 та 13 годинами, причому кожна людина, яка прийшла, чекає іншу протягом 20 хвилин, після чого йде. Знайти ймовірність зустрічі цих людей, якщо кожна людина приходить на зустріч у випадковий момент часу, що не узгоджений з моментом приходу іншої людини.

6. На стелажі бібліотеки у випадковому порядку розставлено 15 підручників, причому 5 з них переплетені. Бібліотекар бере наугад 3 підручники. Знайти ймовірність того, що хоча б один з підручників, що взятий, буде переплетений (подія A).

7. Для сигналізації про аварію встановлено два сигналізатори, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що при аварії спрацює

перший сигналізатор, складає 0,95, другий – 0,9. Знайти ймовірність того, що при аварії спрацює:

а) лише один сигналізатор;

б) хоча б один сигналізатор.

8. Серед 100 лотерейних білетів є 5 виграшних. Знайти ймовірність того, що 2 наугад витягнуті білети будуть виграшними.

9. Ймовірність того, що по одному купленому білету лотереї можна виграти, складає 1/7. Знайти ймовірність того, що, купивши 5 білетів, можна:

а) виграти по всім п’яти білетам;

б) не виграти по жодному білету;

в) виграти хоча б по одному білету.

10. Екзаменаційний білет складається з трьох питань. Ймовірності того, що студент відповість на перше та друге питання, складають 0,9, на третє питання – 0,8. Знайти ймовірність того, що студент складе іспит, якщо для цього необхідно відповісти:

а) на всі питання;

б) хоча б на 2 питання.

11. Мисливець зробив три постріли по цілі, що віддаляється. Ймовірність влучення в ціль напочатку стрільби складає 0,8, а після кожного пострілу зменшується на 0,1. Знайти ймовірність того, що мисливець: а) не влучить всі три рази; б) влучить хоча б один раз; в) влучить 2 рази.

12. Відомо, що логін користувача комп’ютерної мережі складається з п’яти маленьких латинських літер, що не повторюються, пароль складається з 6 цифр, що також не повторюються. Знайти ймовірність того, що у разі однієї спроби можна успішно пройти авторизацію, якщо для цього необхідно правильно ввести логін і пароль.

13. Зловмиснику відомо, що користувач комп’ютерної мережі має пароль, що складається з 5 символів, і логін, що складається з 6 символів. Алфавіт пароля складається цифр і маленьких латинських літер, алфавіт логіна – лише маленьких

латинських літер. Символи, і логіну, і пароля можуть повторюватися. На той випадок, коли користувач забув логін, існує цифровий код з 4 знаків, що не повторюються. Цей код є аналогом логіна. Знайти ймовірність того, що зловмисник зможе пройти авторизацію в мережі, якщо для цього необхідно правильно ввести логін і пароль.

14. Є коробка з 9 новими тенісними м'ячами. Для гри беруть 3 м'ячі і після гри кладуть їх назад у коробку. Різниці між м'ячами, що використовувалися у грі, і новими м'ячами немає. Знайти ймовірність того, що після трьох ігор у коробці не залишиться жодного м'яча, що не використовувався у грі.

15. Парадокс Монті Хола. «Уявіть себе на телегрі, де вам потрібно вибрати одну з трьох дверей: за одними з них автомобіль; за двома іншими – по козі. Ви вибираєте одні двері, наприклад, перші, ведучий відчиняє одні з двох інших, наприклад, треті, за якими коза. Тоді він каже вам: «Бажаєте змінити вибір на другі двері?» Чи отримаєте ви перевагу, якщо зміните свій вибір?» [*Whitaker, Craig F. (1990). [Letter]. «Ask Marilyn» column, Parade Magazine p. 16 (9 September 1990)]*

16. У двох урнах лежать кульки, що відрізняються лише кольором. У першій урні є 5 білих, 11 чорних, і 8 красних кульок, у другій – відповідно 10, 8 і 6. Із обох урн навмання витягнуто по одній кульці. Знайти ймовірність того, що витягнуті кульки одного кольору.

17. У кожній із трьох урн по 6 чорних і 4 білі кульки. Із першої урни навмання витягнута одна кулька перекладена в другу урну. Після цього з другої урни навмання витягнута одна кулька та перекладена у третю урну. Знайти ймовірність того, що кулька, що витягнута потім із третьої урни, буде білою.

18. 4 стрілки незалежно один від одного стріляють по одній мішені, роблячи по одному пострілу. Імовірності влучення для кожного стрілка складає 0,4; 0,6; 0,7; 0,8. Після стрільби встановлено, що у мішень влучили 3 рази. Знайти ймовірність того, що не влучив четвертий стрілок.

19. Батарея з трьох гармат зробила залп, причому два снаряди влучили в мішень. Знайти ймовірність того, що перша гармата дала влучення, якщо ймовірності влучення у мішень першою, другою та третьою гарматою складають відповідно 0,4; 0,3; 0,5.

20. Є 10 монет, причому на одній з них герб з обох сторін, а інші монети звичайні. Навмання вибирають монету і підкидають 10 раз, причому всі 10 раз випадає герб. Знайти ймовірність того, що була вибрана монета з двома гербами.

21. Із сервером комп'ютерної мережі за допомогою комутатора з'єднані дві підмережі з різною кількістю комп'ютерів. Існує ймовірність перевантаження сервера під час обробки запитів від комп'ютерів певної підмережі. Ймовірність того, що в певний момент часу до сервера надійдуть запити від комп'ютерів першої підмережі дорівнює 0,6, від комп'ютерів другої підмережі – 0,4. Імовірність перевантаження сервера внаслідок потоку запитів від комп'ютерів першої підмережі дорівнює 0,1, від комп'ютерів другої підмережі – 0,2. Знайти:

а) ймовірність перевантаження сервера;

б) ймовірність того, що якщо виникло перевантаження, то це було викликано потоком запитів від комп'ютерів першої підмережі;

в) ймовірність того, що якщо виникло перевантаження, то це було викликано потоком запитів від комп'ютерів другої підмережі.

22. Кількість вантажівок, що проїжджають по шосе, на якому стоїть бензоколонка, співвідноситься з кількістю легкових машин як 3/2. Ймовірність того, що буде заправлятися вантажівка, дорівнює 0,1, для легкових машин ця ймовірність дорівнює 0,2. До бензоколонки для заправки під'їхала машина. Знайти ймовірність того, що це вантажівка.

Контрольні питання

1. Надати визначення геометричної ймовірності.

2. Навести головні правила алгебри подій.

3. Який вигляд має формула множення ймовірностей для двох незалежних подій?

4. Який вигляд має формула множення ймовірностей для двох залежних подій?

5. Який вигляд має формула додавання ймовірностей для двох сумісних подій?

6. Який вигляд має формула додавання ймовірностей для двох несумісних подій?

7. Надати визначення повної ймовірності.

8. Як можна пояснити поняття апріорної та апостеріорної ймовірності, користуючись формулою Байєса?

Література: [1, стор. 7–17, 3, стор. 25–37, 11, стор. 21-29]

Практична робота № 4

Тема. Схема Бернуллі.

Мета: набути практичних навичок розв'язання типових задач у рамках схеми Бернуллі.

Короткі теоретичні відомості

Розподіл кількості успіхів у *n* випробуваннях

Визначення. Схемою Бернуллі називають послідовність *незалежних* випробувань, у кожному з яких подія A може відбутися з ймовірністю p або не відбутися з ймовірністю $q = 1 - p$. Причому ймовірність p незмінна від іспиту до іспиту.

Теорема. (Формула Бернуллі). Нехай здійснено n незалежних випробувань у схемі Бернуллі. Тоді ймовірність того, що у цих випробуваннях подія A виникне рівно k разів буде обчислюватися за формулою:

$$p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}. \qquad (4.1)$$

Приклад 4.1. Монету кинуто $n = 3$ рази. Яка ймовірність того, що орел випаде рівно $k = 1$ раз?

Розв'язання.

I спосіб. Нехай A – шукана подія, а $A_i, i = \overline{1,n}$ – подія, яка полягає у тому, що у i-му випробуванні випав орел, відповідно $\bar{A}_i, i = \overline{1,n}$ – випала решка. Отже, застосовуючи теореми множення і додавання незалежних подій, шукана ймовірність може бути записана так

$p(A) = p(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3) = p(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3) + p(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3) + p(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3) = p(A_1)p(\bar{A}_2)p(\bar{A}_3) + p(\bar{A}_1)p(A_2)p(\bar{A}_3) + p(\bar{A}_1)p(\bar{A}_2)p(A_3) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$. Аналогічно можна розписати задачу для будь-яких значень k та n, але зрозуміло, що такий підхід не є раціональним, тому простіше скористатися формулою Бернуллі, яка, по суті, узагальнює розглянутий підхід і спрощує обчислення за будь-яких значень k та n.

II спосіб. Скористаємося формулою Бернуллі і запишемо

$$p_3(1) = C_3^1 p^1 q^{3-1} = \frac{3!}{1!\,(3-1)!} 0.5^1 (1-0.5)^{3-1} = \frac{3}{8}.$$

Найбільш імовірна кількість успіхів

Теорема. У n випробуваннях схеми Бернуллі з ймовірністю успіху p найбільш ймовірною кількістю успіхів є:

а) єдине число $k_0 = [np + p]$, якщо число $np + p$ не ціле;

б) два числа $k_0 = np + p$ і $k_0 - 1 = np + p - 1$, якщо число $np + p$ ціле.

Номер першого успішного випробування

Розглянемо схему Бернуллі з ймовірністю успіху p в одному випробуванні. Випробування проводяться до появи першого успіху. Введемо величину τ, яка набуває значення з $\{1,2,3,...\}$ і дорівнює *номеру першого успішного випробування.*

Теорема. Ймовірність того, що перший успіх відбудеться у випробуванні з номером $k \in N = \{1,2,3,...\}$, дорівнює $p(\tau = k) = pq^{k-1}$.

Наближена формула Лапласа

Теорема. (Локальна наближена формула Лапласа). За великих n у схемі випробувань Бернуллі наявна наближена рівність:

$$p_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \tag{4.2}$$

де $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$ – функція Лапласа.

Приклад 4.2. Яка ймовірність того, що при $n = 1000$ киданнях монети орел випаде рівно $k = 500$ разів?

Розв'язання. Оскільки $npq = 100 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 25 > 10$, то доцільно скористатися наближеною формулою Лапласа:

$p_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$, $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{500-1000\cdot0.5}{\sqrt{25}} = 0.$

Маємо:

$p_{1000}(500) = \frac{1}{5}\varphi(0) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}03 \approx 3\ \%.$

Теорема. За великих значень n у схемі випробувань Бернуллі наявна наближена рівність:

$$p_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{4.3}$$

де $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}} dt$ – інтегральна функція Лапласа.

Зауваження. $\varphi(x)$ – парна функція; $\Phi(x)$ – непарна функція.

Зауваження. Формули (4.2) і (4.3) на практиці застосовують, коли $npq \geq 10$; якщо $npq < 10$, то маємо великі похибки.

Приклад 4.3 Імовірність настання події *А* в кожному з *900* незалежних дослідів дорівнює $p = 0{,}8$. Визначте імовірність того, що подія *А* відбудеться: а)*750* разів; б) *710* разів; в) від *710* до *740* разів.

Розв’язання. Оскільки $npq = 900 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 14{,}4 > 10$, то для розв’язання задач а) і б) скористаємося формулою (25), а для розв’язання задачі в) – формулою (26).

а) $x = \dfrac{750 - 900 \cdot 0{,}8}{\sqrt{900 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 2{,}5;\ \ \varphi(2{,}5) \approx 0{,}0175;$

$P_{900}(750) \approx \frac{1}{12}\varphi(2{,}5) = \frac{1}{12} \cdot 0{,}0175 \approx 0{,}00146$;

б) $x = \dfrac{710 - 720}{12} \approx -0{,}83;\ \ \varphi(-0{,}83) = \varphi(0{,}83) \approx 0{,}2827;$

$P_{900}(710) \approx \frac{1}{12} \cdot 0{,}2827 \approx 0{,}0236;$

в) $x_1 = \dfrac{710 - 720}{12} \approx -0{,}83;\ \ x_2 = \dfrac{740 - 720}{12} \approx 1{,}67;$

$\Phi(-0{,}83) = -\Phi(0{,}83) \approx -0{,}2967;\ \ \Phi(1{,}67) \approx 0{,}4527;$

$P_{900}(710 \le k \le 740) \approx 0{,}4525 + 0{,}2967 = 0{,}7492.$

Імовірність відхилення відносної частоти від постійної ймовірності у незалежних випробуваннях

Маємо n незалежних випробувань у схемі випробувань Бернуллі, у яких подія A відбувається з ймовірністю p.

Імовірність того, що $\left|\frac{k}{n} - p\right| \le \varepsilon, \varepsilon > 0$: $p\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \le \varepsilon\right)$ обчислюється за формулою:

$$p\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \le \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \le \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \qquad (4.4)$$

Приклад 4.4. Імовірність того, що електролампочка, виготовлена заводом, є бракованою, дорівнює *0,02*. Для контролю відібрано навмання *1000* лампочок. Оцініть ймовірність того, що частота бракованих лампочок у вибірці відрізняється від імовірності *0,02* менш ніж на *0,01*.

Розв'язання. Нехай k – кількість бракованих лампочок у вибірці. Нам потрібно оцінити ймовірність виконання нерівності:

$$\left|\frac{k}{1000}-0{,}02\right|<0{,}01.$$

Вона рівносильна нерівності $11 \le k \le 29$. Отже,

$$P(\left|\frac{k}{1000}-0{,}02\right|<0{,}01)=P_{1000}(11\le k\le 29).$$

Оскільки $npq = 1000 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98 = 19{,}6 > 10$, то для обчислення ймовірності $P_{1000}(11 \le k \le 29)$ скористаємося *інтегральною наближеною формулою Лапласа*:

$$x_1=\frac{11-1000\cdot 0{,}02}{\sqrt{1000\cdot 0{,}02\cdot 0{,}98}}\approx -2{,}03;x_2=\frac{29-20}{4{,}43}\approx\frac{9}{4{,}43}\approx 2{,}03;$$

$$\Phi(-2{,}03)\approx -0{,}4788;\Phi(2{,}03)\approx 0{,}4788.$$

Отже, за формулою (26) маємо:

$$P_{1000}(11\le k\le 29)\approx 0{,}4788+0{,}4788=0{,}9576.$$

Приклад 4.5. Імовірність того, що деталь виявиться нестандартною, дорівнює $\mathrm{p}=0{,}1$. Знайти ймовірність того, що серед навмання відібраних *400* деталей відносна частота появи нестандартних деталей відхилиться від ймовірності $\mathrm{p}=0{,}1$ за абсолютною величиною не більше ніж на *0,03*.

Розв'язання. Відповідно до умови задачі, $n=400$; $p=0{,}1$; $q=0{,}9$; $\varepsilon=0{,}03$. Необхідно визначити ймовірність $P(|m/400-0{,}1|\le 0{,}03)$. Використовуючи формулу (29), маємо:

$$P(|m/400-0{,}1|\le 0{,}03)\approx 2\Phi(0{,}03\sqrt{400/(0{,}1\cdot 0{,}9)})=2\Phi(2)=0{,}9544$$

Отриманий результат указує, що, якщо взяти достатньо велику кількість спроб по *400* деталей у кожній, то приблизно у *95,44 %* цих спроб відхилення відносної частоти від постійної ймовірності $p = 0{,}1$ за абсолютною ймовірністю не перевищить *0,03*.

Наближена формула Пуассона

Теорема. (Теорема Пуассона). Нехай у схемі Бернуллі $n \to \infty$, $p \to 0$, отже, $np \to \lambda > 0$. Тоді для $\forall k \geq 0$:

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad (4.5)$$

тобто за великих n і малих p справедлива наближена рівність:

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \ \lambda = np = const. \qquad (4.6)$$

Приклад 4.6. Завод відправив на базу 5000 доброякісних виробів, $p = 0{,}0002$ – імовірність того, що виріб зазнає пошкодження під час транспортування. Знайти ймовірність того, що на базу приїде рівно 3 пошкоджених вироби.

Розв'язання. $\lambda = np = 5000 \cdot 0{,}0002 = 1$;

$$p_{5000}(3) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{1}{6e} \approx 0{,}06.$$

Приклад 4.7. Телефонна станція обслуговує *400* абонентів. Для кожного абонента ймовірність того, що протягом години він зателефонує на станцію, дорівнює *0,01*. Визначте ймовірність таких подій: а) протягом години *5* абонентів зателефонують на станцію; б) протягом години не більше, ніж *4* абоненти зателефонують на станцію; в) протягом години не менше, ніж *3* абоненти зателефонують на станцію.

Розв'язання. Оскільки $p = 0{,}01$ мале і $n = 400$ велике, то скористаємося наближеною формулою Пуассона при $\lambda = 400 \cdot 0{,}01 = 4$.

а) $P_{400}(5) \approx \frac{4^5}{5!} e^{-4} \approx 0{,}156293$;

б) $P_{400}(0 \leq k \leq 4) \approx 0{,}018316 + 0{,}073263 + 0{,}146525 + 0{,}195367 +$
$+0{,}195367 = 0{,}628838$;

в) $P_{400}(3 \leq k \leq 400) = 1 - P_{400}(0 \leq k \leq 2) =$
$= 1 - 0{,}018316 - 0{,}073263 - 0{,}146525 = 0{,}761896.$

Задачі для самостійного розв’язання

Виконати індивідуальне завдання. Завдання полягає у розв’язанні п’яти задач, які потрібно вибрати зі списку, наведеного нижче. Правило вибору номерів такий: $n, n+1, n+2, n+3, n+4$, де n – номер студента у списку групи. У разі, якщо було досягнуто кінця списку задач, потрібно циклічно повернутися до його початку.

Завдання

1. Імовірність влучення в мішень унаслідок одного пострілі для стрілка дорівнює *0,8* і не залежить від номера пострілу. Потрібно знайти ймовірність того, що внаслідок п’яти пострілів відбудеться рівно *2* влучення в мішень.

2. Знайдіть *найбільш імовірну кількість* влучень у мішень унаслідок *5* пострілах, використовуючи умову попередньої задачі, і відповідну цьому числу ймовірність.

3. Знайдіть *найбільш імовірну кількість* випадінь герба внаслідок *25* кидань монети.

4. Монету кинуто *10* разів. Знайдіть ймовірність того, що герб випаде: а) від *4* до *6* разів; б) хоча б один раз.

5. Яка ймовірність того, що при $n = 1000$ киданнях монети орел випаде рівно $k = 500$ разів?

6. Імовірність настання події А в кожному з 900 незалежних випробувань дорівнює $p = 0{,}8$. Знайдіть імовірність того, що подія А відбудеться: а) 750 разів; б) 710 разів; в) від 710 до 740 разів.

7. Імовірність того, що електролампочка, виготовлена заводом, є бракованою, дорівнює *0,02*. Для контролю відібрано навмання *1000* лампочок. Оцінить імовірність того, що частота бракованих лампочок у вибірці відрізняється від імовірності *0,02* менше, ніж на *0,01*.

8. (Задача 2020-го року про коронавірус). У Кременчуці станом на 03.04.20 було офіційно зареєстровано 4 хворі на коронавірус. Будемо реалістами і припустимо, що їх у сто разів більше, тобто 400. Маємо 250 000 жителів.

Припускаємо, що жоден з вірусоносіїв не знаходиться у самоізоляції чи ізоляції та вільно пересувається містом. Отже, імовірність випадкової зустрічі з вірусоносієм складає $p = \frac{400}{250000} = 0{,}0016$. Припустимо, що супермаркет у центрі міста відвідують щодня 10000 покупців. Яка ймовірність того, що серед них буде хоча б один хворий на коронавірус?

9. Телефонна станція обслуговує *400* абонентів. Для кожного абонента ймовірність того, що протягом години він подзвонить на станцію, дорівнює *0,01*. Знайдіть імовірність таких подій: а) протягом години *5* абонентів зателефонують на станцію; б) протягом години не більше, ніж *4* абоненти зателефонують на станцію; в) протягом години не менше, ніж *3* абоненти зателефонують на станцію.

10. Імовірність того, що деталь не є стандартною, дорівнює $\mathrm{p} = 0{,}1$. Знайти ймовірність того, що серед навмання відібраних *400* деталей відносна частота появи нестандартних деталей відхилиться від імовірності $\mathrm{p} = 0{,}1$ за абсолютною величиною не більше ніж на *0,03*.

11. У локальній комп'ютерній мережі підрозділу комерційного банку 20 персональних комп'ютерів. Кожен клієнт може протягом хвилини незалежно один від одного здійснити запит до сервера головної бази даних банку з імовірністю $p = 0.3$, або не здійснити з імовірністю $q = 1 - p$.

а) чому дорівнює найбільш ймовірна кількість запитів за годину?

б) чому дорівнює імовірність найбільш ймовірної кількості запитів за годину?

в) чому дорівнює імовірність того, що кількість запитів за годину буде від 3 до 7?

г) чому дорівнює імовірність того, що хоча б один клієнт здійснить запит?

12. У корпоративній мережі науково-виробничого об'єднання 1000 персональних комп'ютерів. Кожен клієнт може протягом хвилини незалежно

один від одного здійснити запит до сервера головної бази даних з імовірністю $p = 0{,}2$, або не здійснити з імовірністю $q = 1 - p$.

а) чому дорівнює найбільш імовірна кількість запитів за годину?

б) чому дорівнює імовірність найбільш ймовірної кількості запитів за годину?

в) чому дорівнює ймовірність того, що кількість запитів за годину буде від 500 до 1000?

г) чому дорівнює ймовірність того, що хоча б один клієнт здійснить запит?

13. Кількість клієнтів місцевого інтернет-провайдера складає 10000 абонентів. Для кожного абонента ймовірність того, що протягом однієї секунди він здійснить запит до сервера провайдера складає $p = 0{,}001$.

а) знайти ймовірність того, що протягом секунди здійснять запит 5 абонентів;

б) знайти ймовірність того, що протягом секунди здійснять запит від 5 до 7 абонентів;

в) знайти ймовірність того, що протягом секунди хоча б один абонент здійснить запит.

14. Імовірність виготовити стандартну деталь на верстаті-автоматі дорівнює 0,95. Навмання беруть три деталі, виготовлені на цьому верстаті. Обчислити ймовірність таких дій: три деталі виявляться стандартними; бракованими; одна з трьох деталей виявиться бракованою.

15. Імовірність появи випадкової події в кожному з належних випробувань незмінна і дорівнює 0,7. Провели 900 випробувань. Обчислити ймовірність таких дій:

1) подія відбувається в 620 випробуваннях;

2) подія відбувається не менше 620 разів.

16. Імовірність появи випадкової події внаслідок одного випробування незмінна і дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що внаслідок 400 випробувань

відносна частота появи події відхиляється від імовірності $p = 0,6$ не більше, ніж на $0,004$.

17. Імовірність появи випадкової події в кожному з належних випробувань незмінна і дорівнює 0,8. Знайти, яке відхилення відносної частоти появи події від її ймовірності очікується з імовірністю 0,999 унаслідок 10000 випробувань.

18. Телефонна станція обслуговує 5000 абонентів. Імовірність того, що протягом хвилини від абонента надійде запит до станції, незмінна і дорівнює 0,01. Знайти:

а) найбільш імовірну кількість запитів;

б) імовірність найбільш імовірної кількості запитів;

в) імовірність того, що протягом хвилини надійде 100 запитів від клієнтів;

г) імовірність того, що протягом хвилини надійде не більше, ніж 5 запитів.

19. У шухляді міститься 7 стандартних і 3 браковані деталі. Деталі із шухляди беруть по одній з поверненням. Обчислити ймовірність таких дій:

а) стандартна деталь з'явиться 70 разів зі 100;

б) стандартна деталь з'явиться від 65 до 80 разів зі 100.

20. Баскетболіст чотири рази кидає м'яч у кошик. Імовірність влучення м'ячем щоразу незмінна і дорівнює 0,9. Обчислити ймовірність таких дій: кількість влучень дорівнюватиме трьом; не більше трьох. Обчислити ймовірність найбільшого ймовірного числа влучень у кошик.

21. Імовірність появи випадкової події в кожному незалежному випробуванні незмінна і дорівнює 0.6. Скільки необхідно провести випробувань, щоб з імовірністю 0,99 можна було очікувати, що відхилення відносної частоти появи події від її ймовірності p=0.6 виявиться за абсолютною величиною не більше, ніж 0,001?

22. Монету кидають 225 разів. Обчислити ймовірність таких дій: герб випадає 110 разів; герб випадає від 110 до 200 разів.

Контрольні питання

1. Надати визначення схеми випробувань Бернуллі.

2. Які властивості має випадковий експеримент за схемою Бернуллі?

3. Що загального і відмінного схеми випробувань Бернуллі від схеми випробувань, що описується гіпергеометричним розподілом?

4. Як визначається ймовірність отримати k успіхів у n незалежних випробуваннях за схемою Бернуллі?

5. Навести приклади випадкових експериментів, які можна моделювати за допомогою схеми Бернуллі.

Література: [2, стор. 37–44, 9, 10, 11, стор. 31-36]

3 КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ЗНАНЬ СТУДЕНТІВ

Практичні роботи студенти виконують у межах змістового модуля «Теорія ймовірностей та ймовірнісні процеси».

Усього студент повинен виконати сім практичних завдань. За виконання всіх індивідуальних завдань у межах кожної практичної роботи студент може отримати максимально 40 балів. Максимальна кількість балів, яку може отримати студенти за виконання однієї практичної роботи, складає 5 балів: 3 – «задовільно», 4 – «добре», 5 – «відмінно».

За кожне індивідуальне завдання у межах практичної роботи виставляють:

– 5 балів, якщо студент виконав практичну роботу, написав звіт і захистив його, тобто правильно та вичерпно відповів на всі питання. Допускаються незначні неточності під час відповіді на одне з контрольних питань;

– 4 бали, якщо студент виконав практичну роботу, написав звіт і захистив його, але мав незначні помилки;

– 3 бали, якщо студент виконав практичну роботу, написав звіт і захистив його, але під час захисту не відповів на кілька питань і мав незначні помилки в оформленні звіту.

Іще до п’яти додаткових балів студент може отримати, якщо складе комплексний звіт у вигляді інтерактивного електронного документа за допомогою R+Bookdown чи R+Quarto і розгорне його у хмарному сервісі, наприклад, на GitHub (див. лаб. роб. 1–2).

Розподіл балів за видами занять, що отримують студенти, наведено у навчальній робочій програмі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Dembo A. (2019, April 23). Probability Theory: STAT310/MATH230. Department of Mathematics, Stanford University. Email: amir@math.stanford.edu. URL: https://web.stanford.edu/class/stats310a/lnotes.pdf

2. McMullen C. (2011). *Probability Theory: Course Notes.* Harvard University. Retrieved March 29, 2021. URL: https://people.math.harvard.edu/~ctm/papers/home/text/class/harvard/154/course/course.pdf

3. F. M. Dekking, C. Kraaikamp, H. P. Lopuhaä. A Modern Introduction to Probability and Statistics: Understanding Why and How Meester. Springer Science & Business Media, 2005 - 486 стор.

4. Glass G. V., & Stanley J. C. (1970). Statistical Methods in Education and Psychology (Hardcover). Prentice Hall. (596 pages). Посилання на веб-сайт: https://www.amazon.com.au/Statistical-Methods-Education-Psychology-Glass/dp/0138449287

5. David F. Anderson, Timo Seppäläinen, Benedek Valkó. Introduction to Probability. Cambridge University Press, 2 лист. 2017 р.

6. Runyon R. P. (1977). *Nonparametric Statistics: A Contemporary Approach* (Addison-Wesley Second Language Professional Library Series) (Multilingual Edition). Addison Wesley Publishing Company. (218 pages) Посилання на веб-сайт: https://www.amazon.com/Nonparametric-statistics-contemporary-approach-Addison-Wesley/dp/0201065479

7. Mark Ward, Ellen Gundlach ,W. H. Freeman. Introduction to Probability. 12 черв. 2015 р. – 704 стор.

8. Draper N. R., & Smith H. (1998). Applied Regression Analysis (Wiley Series in Probability and Statistics) (Third Edition). Wiley-Interscience. (736 pages). Посилання на веб-сайт: https://www.amazon.com/Applied-Regression-Analysis-Probability-Statistics/dp/0471170828

9. Stroock D. W. (2011). *Probability Theory: An Analytic View* (2nd ed.). Cambridge University Press. ISBN-10: 0521132509, ISBN-13: 978-0521132503.

10. MIT OpenCourseWare. (2014). *Theory of Probability* (Spring 2014). Instructor: Prof. Scott Sheffield. Department: Mathematics. Course URL: https://ocw.mit.edu/courses/18-175-theory-of-probability-spring-2014/

11. Найко Д. А. Шевчук О. Ф. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб. – Вінниця: ВНАУ, 2020. 382 с. http://repository.vsau.org/getfile.php/24513.pdf

12. Сидоренко В. М., Садовнича С. А., Долударєва Є. В. Оптимізація структури тестових завдань навчальних онлайн-курсів на основі ймовірнісної моделі. *Інженерні та освітні технології*. 2022. Т. 10. № 2. С. 27–36. doi: https://doi.org/10.30929/2307- 9770.2022.10.02.03

13. Сидоренко В. М., Кирилаха Н. Г. Дидактико-методичні аспекти викладання теорії ймовірностей та математичної статистики студентам ІТ напряму. *Інженерні та освітні технології*. 2023. Т. 11. № 3. С. 17–23. Doi: https://doi.org/10.32782/2307- 9770.2023.11.03.02

Інформаційні ресурси

14. git. URL: https://git-scm.com/downloads (дата звернення: 14.07.2023).

15. git (укр.). URL: https://git-scm.com/book/uk/v2 (дата звернення: 14.07.2023).

16. Teacher's DevOps Course (Lecture 10). URL: https://www.youtube.com/watch?v=Md8RW6tKCNg (дата звернення: 14.07.2023).

17. Callout Blocks. Markdown Syntax. URL: https://quarto.org/docs/authoring/callouts.html (дата звернення: 14.07.2023).

18. BibTeX (Вікіпедія). URL: https://quarto.org/docs/authoring/callouts.html (дата звернення: 14.07.2023).

19. Literate prigramming (Вікіпедія). URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Literate_programming (дата звернення: 14.07.2023).

20. Posit. (n.d.). Put data into production with Posit Connect. URL: https://posit.co/ (дата звернення: 14.07.2023)

21. The R Project for Statistical Computing. URL: https://www.r-project.org/ (дата звернення: 14.07.2023)

22. R Markdown. URL: https://rmarkdown.rstudio.com/ (дата звернення: 14.07.2023)

23. Markdown. URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/Markdown (дата звернення: 14.07.2023)

24. LaTeX. URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/LaTeX (дата звернення: 14.07.2023)

25. sandino. 2013. “Cheat Sheet of Markdown.” Article. https://github.com/sandino/Markdown-Cheatsheet#emphasis .

26. Pandoc a universal document converter. URL: https://pandoc.org/ (дата звернення: 14.07.2023)

27. CRAN. URL: https://cran.r-project.org/ (дата звернення: 14.07.2023)

28. Chan, Chung-hong, Geoffrey CH Chan, Thomas J. Leeper, and Jason Becker. 2018. *Rio: A Swiss-Army Knife for Data File i/o*

29. Wickham, Hadley. 2009. *Ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis*. Springer-Verlag New York. http://ggplot2.org.

30. Wickham, Hadley, Mara Averick, Jennifer Bryan, Winston Chang, Lucy D’Agostino McGowan, Romain Francois, Garrett Grolemund, et al. 2019. “Welcome to the tidyverse.” *Journal of Open Source Software* 4 (43): 1686. https://doi.org/10.21105/joss.01686.

31. Графік Q–Q. URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D1%80%D0%B0%D1%84%D1%96%D0%BA_Q-Q (дата звернення: 14.07.2023)

32. Welcome to Quarto. (n.d.). Retrieved from https://quarto.org/

33. Wickham H., Navarro D., & Pedersen T. L. (2023). *ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis (3e)*. Retrieved from https://ggplot2-book.org/

34. Wickham H., Çetinkaya-Rundel M., & Grolemund G. (n.d.). *R for Data Science (2e)*. Retrieved from https://r4ds.hadley.nz/

35. Сидоренко В. М. (2022, April 1). *Data Science на R. Лабораторний практикум (draft version)*. Retrieved from https://vgamaley.github.io/DS-book-lab/

Додаток А

Зразок оформлення титульної сторінки звіту про виконання практичної роботи

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО

Кафедра комп'ютерної інженерії та електроніки

ПРАКТИЧНА РОБОТА
з навчальної дисципліни **«Імовірнісно-статистичні методи інформаційних технологій»**

Тема «____________________________»

Студент гр.________ПІБ_____________
Викладач _________ПІБ______________

Кременчук 20__

Методичні вказівки щодо виконання практичних і самостійної робіт студентів з навчальної дисципліни «Імовірнісно-статистичні методи інформаційних технологій» для студентів денної форми навчання зі спеціальності 123 – «Комп’ютерна інженерія» освітньо-професійної програми «Комп’ютерна інженерія» освітнього ступеня «Бакалавр» (частина 1)

Укладач доц. В. М. Сидоренко
Відповідальний за випуск д. т. н., проф. А. Л. Перекрест

Підп. до др.________________Формат 60х84 1/16. Папір тип. Друк ризографія.
Ум. друк. арк. _____Наклад ________прим. Зам. №__________ Безкоштовно.

Редакційно-видавничий відділ
Кременчуцького національного університету
імені Михайла Остроградського
вул. Університетська , 20 м. Кременчук, 39600